Grundlagen der Informatik

- Schaltungslogik: Boolesche Algebra -

Prof. Dr. Klaus Volbert

Hochschule für angewandte Wissenschaften
Fakultät Informatik und Mathematik

Wintersemester 2010/11
Regensburg, 20./21. Oktober 2010

Boolesche Algebra

- Benannt nach seinem Entwickler, einem englischen Mathematiker: George Boole (Mitte des 19. Jahrhunderts)

- Es gibt nur zwei Werte
  - Wert 0: falsch bzw. false (kein Strom, keine Spannung)
  - Wert 1: wahr bzw. true (Strom, Spannung)

- Grundlage für die Digitaltechnik (heutige Rechner-Hardware)
  - Verständnis der booleschen Algebra ist Voraussetzung für die Konstruktion und den Bau von effizienten Strukturen und Schaltungen zur Verarbeitung binärer Größen

- Boolesche Algebra liefert Rechenregeln zur
  - Mengenlehre (Mengen)
  - Aussagenlogik (Aussagen)
  - Schaltalgebra (Digitale Schaltungen)

Boolesche Basisoperatoren

- OR-Operator (logische Summe, Disjunktion): OR, +, $\vee$

x_0	x_1	x_0 OR x_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Boolesche Variable

Wahrheitstabelle

- AND-Operator (logisches Produkt, Konjunktion): AND, $\cdot$, $\wedge$, leer

x_0	x_1	x_0 AND x_1
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- NOT-Operator (Invertierung, Negation): NOT, $-$, $\neg$, $\overline{}$

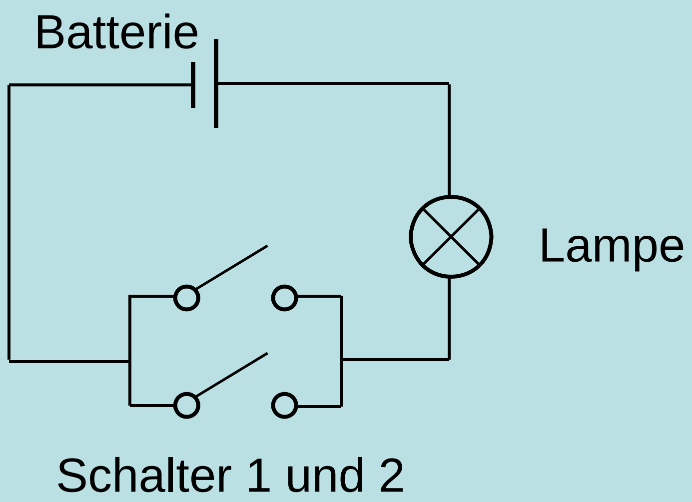
x_0	NOT x_0
0	1
1	0

Aussagenlogik

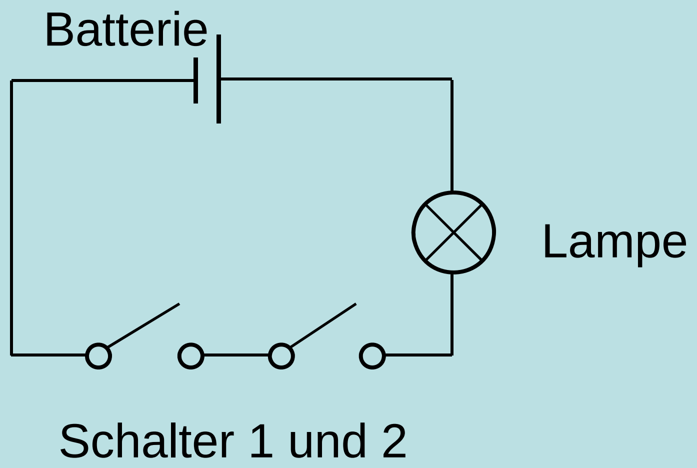
- OR, +, $\vee$
  - Gesamtverknüpfung ist wahr, wenn nur eine der verknüpften Einzelbedingungen wahr ist
  - Gesamtverknüpfung ist nur dann falsch, wenn alle verknüpften Einzelbedingungen falsch sind
  - Beispiel: (Alter $\geq$ 14) + (Körpergröße $\geq$ 1,40 m)
- AND, $\cdot$, $\wedge$, leer
  - Gesamtverknüpfung ist wahr, wenn alle der verknüpften Einzelbedingungen wahr sind
  - Gesamtverknüpfung ist nur dann falsch, wenn mindestens eine der verknüpften Einzelbedingungen falsch ist
  - Beispiel: (Alter $\geq$ 18) $\cdot$ (Alter $\leq$ 30)
- NOT , –, $\neg$, $\overline{}$
  - Ergebnis ist wahr, wenn der Wert nicht wahr ist und umgekehrt

Boolesche Schaltungen

- OR mittels Parallelschaltung



- AND mittels Serienschaltung



Definition Boolesche Algebra

- Sei B eine Menge und seien

$$+ : B \times B \to B \text{ und}$$
$$\cdot : B \times B \to B \text{ und}$$
$$- : \quad B \quad \to B$$

  drei Operatoren auf B.

- $(B, +, \cdot, -)$ heißt boolesche Algebra, wenn die Axiome der booleschen Algebra erfüllt sind.

- Beispiel:
  - $(\{0,1\}, +, \cdot, -)$ ist eine boolesche Algebra (Nachweis: Übung)

Axiome der booleschen Algebra

Name	Formeln	
Kommutativgesetze	$x_0\, x_1 = x_1 x_0$	$x_0 + x_1 = x_1 + x_0$
Assoziativgesetze	$(x_0\, x_1)x_2 = x_0(x_1 x_2)$	$(x_0 + x_1) + x_2 = x_0 + (x_1 + x_2)$
Idempotenzgesetze	$x_0\, x_0 = x_0$	$x_0 + x_0 = x_0$
Distributivgesetze	$x_0(\, x_1 + x_2) = x_0 x_1 + x_0 x_2$	$x_0 + (x_1 x_2) = (x_0 + x_1)(x_0 + x_2)$
Netraulitätsgesetze	$x_0\, 1 = x_0$	$x_0 + 0 = x_0$
Extremalgesetze	$x_0\, 0 = 0$	$x_0 + 1 = 1$
Doppelnegationsges.	$\overline{\overline{x_0}} = x_0$	
De Morgan Gesetze	$\overline{x_0\, x_1} = \overline{x_0} + \overline{x_1}$	$\overline{x_0 + x_1} = \overline{x_0}\ \overline{x_1}$
Komplementärgesetze	$x_0 \overline{x_0} = 0$	$x_0 + \overline{x_0} = 1$
Dualitätsgesetze	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$
Absorptionsgesetze	$x_0 + (x_0 x_1) = x_0$	$x_0(x_0 + x_1) = x_0$

Wahrheitstabelle De Morgan Gesetz

		$\overline{x_0 x_1} = \overline{x_0} + \overline{x_1}$					$\overline{x_0 + x_1} = \overline{x_0}\ \overline{x_1}$				
x_0	x_1	$x_0 x_1$	$\overline{x_0 x_1}$	$\overline{x_0}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_0} + \overline{x_1}$	$x_0 + x_1$	$\overline{x_0 + x_1}$	$\overline{x_0}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_0}\ \overline{x_1}$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0

Boolesche Funktionen

- Eine Funktion $f\colon B^n \to B$ heißt n-stellige boolesche Funktion
- Wir betrachten:

$$B = \{0,1\}, \text{ also } f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

- Einstellige Boolesche Funktionen

x_0	0 1	Boolescher Ausdruck	Bezeichnung
f_0	0 0	0	Nullfunktion
f_1	0 1	$\boldsymbol{x_0}$	Identität
f_2	1 0	$\overline{\boldsymbol{x_0}}$	Negation
f_3	1 1	1	Einsfunktion

- Wie viele Funktionswerte kann eine n-stellige boolesche Funktion haben? 2^{2^n}

Zweistellige Boolesche Funktionen

x_1 x_0	0 1 0 1 0 0 1 1	Boolescher Ausdruck	Verknüpfung	Bezeichnung
f_0	0 0 0 0	0		Nullfunktion
f_1	0 0 0 1	$x_0\, x_1$	x_0 AND x_1	**Konjunktion**
f_2	0 0 1 0	$x_0\overline{x_1}$	x_0 AND NOT x_1	**1. Differenz**
f_3	0 0 1 1	x_0		1. Identität
f_4	0 1 0 0	$\overline{x_0}x_1$	NOT x_0 AND x_1	**2. Differenz**
f_5	0 1 0 1	x_1		2. Identität
f_6	0 1 1 0	$\overline{x_0}x_1 + x_0\overline{x_1}$	x_0 XOR x_1	**Antivalenz**
f_7	0 1 1 1	$x_0 + x_1$	x_0 OR x_1	**Disjunktion**
f_8	1 0 0 0	$\overline{x_0 + x_1}$	x_0 NOR x_1	**Negatdisjunktion**
f_9	1 0 0 1	$(\overline{x_0}+x_1)(x_0 + \overline{x_1})$	$x_0 \leftrightarrow x_1$	**Äquivalenz**
f_{10}	1 0 1 0	$\overline{x_1}$	NOT x_1	2. Negation
f_{11}	1 0 1 1	$x_0 + \overline{x_1}$	$x_1 \rightarrow x_0$	**2. Implikation**
f_{12}	1 1 0 0	$\overline{x_0}$	NOT x_0	1. Negation
f_{13}	1 1 0 1	$\overline{x_0} + x_1$	$x_0 \rightarrow x_1$	**1. Implikation**
f_{14}	1 1 1 0	$\overline{x_0 x_1}$	x_0 NAND x_1	**Negatkonjunktion**
f_{15}	1 1 1 1	1		Einsfunktion

■ Uninteressante Funktionen

■ Einfache Funktionen mit AND, OR, NOT

■ Funktionen, die sich aus AND, OR, NOT bilden lassen

„Wenn, dann“-Logik, Beispiel

HOCHSCHULE REGENSBURG UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

- Aussagenlogik
  - „Wenn es regnet, dann muss ein Schirm aufgespannt werden“

→ Wenn es nun nicht regnet, so ist die Aussage immer erfüllt, unabhängig davon, ob der Schirm aufgespannt ist oder nicht. Regnet es und der Schirm ist aufgespannt, so ist diese Aussage natürlich auch erfüllt. Nicht erfüllt ist diese Aussage also nur dann, wenn es regnet und es ist kein Schirm aufgespannt.

x_0 „es regnet“	x_1 „Schirm ist aufgespannt“	$x_0 \rightarrow x_1$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Rückführung auf Basisfunktionen

- Satz: Alle 2-stelligen booleschen Funktionen können mit Hilfe von AND, OR und NOT dargestellt werden

- Satz: Alle 2-stelligen booleschen Funktionen können entweder mit Hilfe von NOT und AND, oder mit Hilfe von NOT und OR dargestellt werden
  - De Morgan/Doppeltes Negationsgesetz:

$$\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{x_1} = \overline{\overline{x_0}} + \overline{\overline{x_1}} = \overline{\overline{x_0}\ \overline{x_1}}$$

$$\boldsymbol{x_0}\boldsymbol{x_1} = \overline{\overline{x_0}}\ \ \overline{\overline{x_1}} = \overline{\overline{x_0} + \overline{x_1}}$$

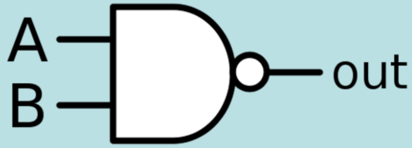
- Satz: Alle 2-stelligen booleschen Funktionen können entweder mit Hilfe von NAND oder mit Hilfe von NOR dargestellt werden

- Was ist die wesentliche Folgerung aus dem letzten Satz?
  - Alle Schaltnetze können aus einer einzigen Art aufgebaut werden (NAND- oder NOR-Gatter)

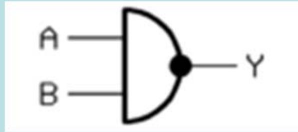
Symbole für NAND- und NOR-Gatter

- NAND-Gatter

IEC 60617-12

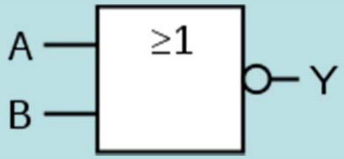


US ANSI 91-1984

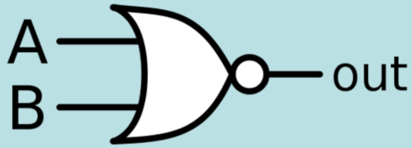


DIN 40700 (vor 1976)

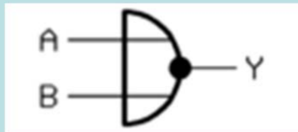
- NOR-Gatter



IEC 60617-12



US ANSI 91-1984



DIN 40700 (vor 1976)

Anmerkungen

- Alle n-stelligen booleschen Funktionen mit $n \geq 3$ können durch Verknüpfung 2-stelliger boolescher Funktionen realisiert werden

- Dualitätsprinzip
  - Alle Rechenregeln behalten ihre Gültigkeit, wenn man die Rollen von AND und OR und von 0 und 1 vertauscht

    Beweisidee:
    Axiome sind symmetrisch bzgl. (0 und 1) und (AND und OR)

Konjunktive Normalform I

- Seien $\boldsymbol{x_0, \dots, x_{n-1}}$ Boolesche Variablen
- $\boldsymbol{x_i}$ heißt positives Literal, $\boldsymbol{\overline{x_i}}$ heißt negatives Literal
- Eine Klausel (Disjunktionsterm) besteht aus der Disjunktion von endlich vielen Literalen und ist ein Boolescher Ausdruck der Form

$$K_{\boldsymbol{t}} = (l_{\boldsymbol{0}} \vee l_{\boldsymbol{1}} \vee \dots \vee l_{\boldsymbol{m-1}}) \text{ mit}$$

$$l_{\boldsymbol{j}} \in \{\boldsymbol{x_i} \mid \boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{0}, \dots, \boldsymbol{n-1}\}\} \cup \{\boldsymbol{\overline{x_i}} \mid \boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{0}, \dots, \boldsymbol{n-1}\}\}$$

- Ein Boolescher Ausdruck in Konjunktiver Normalform (KNF) ist eine Konjunktion von Klauseln:

$$\bigwedge_{t=1}^{s} K_{\boldsymbol{t}}$$

- Beispiele: $(\boldsymbol{x_0} \vee \boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_3})$, $(\boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{x_5}) \wedge (\boldsymbol{\overline{x_2}} \vee \boldsymbol{x_3})$

Konjunktive Normalform II

- Satz: Jeder Boolesche Ausdruck kann in konjunktiver Normalform dargestellt werden
- Anmerkungen:
  - Eine KNF ist in i-KNF, wenn jede Klausel maximal i Literale enthält
  - Analog lässt sich die disjunktive Normalform (DNF) definieren
  - Boolesche Ausdrücke, die in KNF oder DNF vorliegen, können direkt in ein zweistufiges Schaltnetz überführt werden
- Erfüllbarkeit
  - Ein boolescher Ausdruck (in KNF/DNF) heißt erfüllbar, wenn es eine Belegung für $\boldsymbol{x_0, \dots, x_{n-1}}$ gibt, die den Ausdruck wahr macht (Wert: 1)
- Beispiele:
  - Sind die folgenden booleschen Ausdrücke erfüllbar?

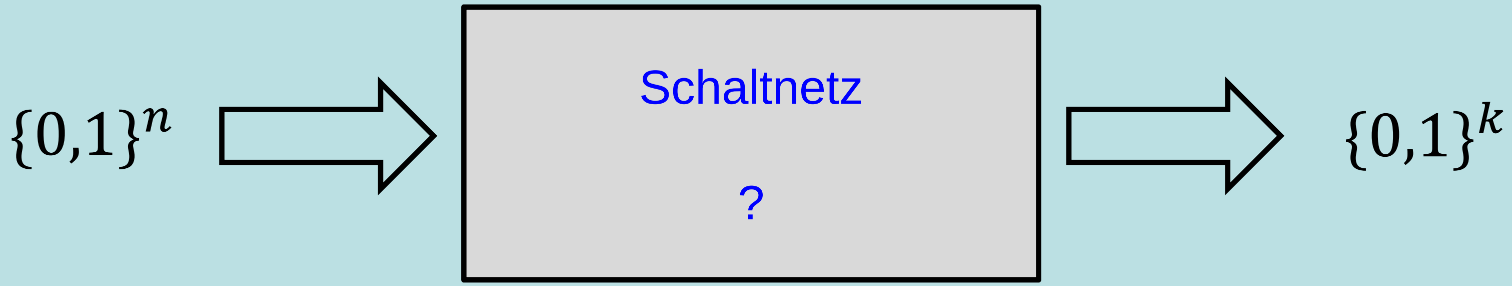
$$(\boldsymbol{x_0} \vee \boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_3}),\ (\boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{x_5}) \wedge (\overline{\boldsymbol{x_2}} \vee \boldsymbol{x_3}),\ (\boldsymbol{x_2} \vee \boldsymbol{x_5}) \wedge (\overline{\boldsymbol{x_2}} \vee \overline{\boldsymbol{x_5}})$$

- Vorschau Erfüllbarkeitsproblem:

  SAT$= \{K \mid K \text{ ist erfüllbarer boolescher Ausdruck in KNF}\}$, SAT ist „schwer“

Vorschau Schaltnetze

- Gegeben: $f:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^k$
- Gesucht: Schaltnetz, das die Funktion implementiert (Zusammenschaltung von Gattern)



- … oder umgekehrt: Schaltnetz gegeben, Funktion gesucht