Musterlösungen Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (erstellt von KV):

1. $L_1 = \{aa \mid a \in \{0,1\}^*\}$

   Annahme: L_1 ist regulär

   Dann existiert nach Pumping-Lemma (PL) ein $n \in \mathbb{N}$ mit den im PL genannten Eigenschaften. Wähle $z = 0^n10^n1$. Es gilt: $|z| = 2n + 2 \geq n$ und $z = aa \in L$ mit $a = 0^n1$. Sei nun $z = uvw$ die Zerleung nach PL, die es gibt. Nach PL gilt, dass $|uv| \leq n$ ist, d.h. uv besteht nur aus 0en und insbesondere besteht v nur aus 0en. Zusätzlich gilt $|v| \geq 1$, d.h. v besteht mindestens aus einer 0. Für uv^0w ergibt sich daher: $uv^0w = 0^{n-|v|}10^n1$. Da rechts von der zweiten 1 von links gelesen keine weitere 0 folgt, besteht die einzige mögliche Aufteilung des Wortes in zwei Teile hinter der ersten 1 von links gelesen. Nun ist im linken Teil aber mindestens eine 0 weniger enthalten als im rechten Teil, d.h. $uv^0w \notin L$. Widerspruch, d.h. L_1 ist nicht regulär.

2. $L_2 = \{1^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

   Annahme: L_2 ist regulär

   Dann existiert nach Pumping-Lemma (PL) ein $n \in \mathbb{N}$ mit den im PL genannten Eigenschaften. Wähle $z = 1^p$ mit $p \geq n$ und p ist Primzahl (p existiert, da es unendlich viele Primzahlen gibt). Dann gilt: $|z| = p \geq n$ und $z \in L$. Sei nun $z = uvw$ die Zerleung nach PL, die es gibt. Es gilt: $uv^iw = 1^{|uv^iw|} = 1^{|uw|+i\cdot|v|}$. Nach Voraussetzung (PL und L_2) muss nun $|uw| + i \cdot |v|$ eine Primzahl sein. Betrachte $i = 1 + p$, dann gilt:

   $$|uw|+i\cdot|v| = |uw|+(1+p)|v| = |uw|+|v|+p|v| = |uvw|+p|v| = p(1+|v|)$$

   Da $p \geq 2$ und $1 + |v| \geq 1 + 1 = 2$ hat $uv^{1+p}w$ zwei Faktoren grösser gleich 2 und ist somit keine Primzahl. Widerspruch, d.h. L_2 ist nicht regulär.

3. $L_3 = \{a^nb^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\}$

   Annahme: L_3 ist regulär

   Dann existiert nach Pumping-Lemma (PL) ein $n \in \mathbb{N}$ mit den im PL genannten Eigenschaften. Wähle $z = a^nb^m$ mit $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$. Dann gilt: $|z| = n + m \geq n$ und $z \in L$. Sei nun $z = uvw$ die Zerleung nach PL, die es gibt. Nach PL gilt, dass $|uv| \leq n$ ist, d.h. uv besteht nur aus

a's und insbesondere besteht v nur aus a's. Zusätzlich gilt $|v| \geq 1$, d.h. v besteht mindestens aus einem a. Da v unabhängig von der Anzahl b feststeht und $1 \leq |v| \leq n$, kann $m = n + |v|$ gesetzt werden. Für uv^2w gilt dann: $uv^2w = a^{n+|v|}b^{n+|v|} \notin L_3$. Widerspruch, d.h. L_3 ist nicht regulär.

Aufgabe 2 (erstellt von KV):

1. 4-Multiplexer mit den drei Elementen Decoder, AND-Gatter und OR-Gatter, der zu einer Dualzahl, die in Form von 4 Steuersignalen anliegt, am Ausgang anzeigt, ob es sich bei dieser Dualzahl um eine Primzahl handelt (1) oder nicht (0):

   4-zu-16 Dekodierer:

s_0	s_1	s_2	s_3	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	...	y_{13}	y_{14}	x_{15}
0	0	0	0	1	0	0	0	0	...	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	...	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	...	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	...	0	0	0
						...						
1	1	1	0	0	1	0	0	0	...	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0	0	0	...	0	0	1

   Umwandlung in DNF liefert booleschen Ausdruck für jede Spalte, z.B. $x_0 = \overline{s_0 s_1 s_2 s_3}$, so dass der 4-zu-16 Dekodierer gebaut werden kann.

   Eingänge für den 4-Multiplexer:

s_0	s_1	s_2	s_3	0: keine Primzahl, 1: Primzahl
0	0	0	0	0 (x_0)
0	0	0	1	0 (x_1)
0	0	1	0	1 (x_2)
0	0	1	1	1 (x_3)
0	1	0	0	0 (x_4)
0	1	0	1	1 (x_5)
0	1	1	0	0 (x_6)
0	1	1	1	1 (x_7)
1	0	0	0	0 (x_8)
1	0	0	1	0 (x_9)
1	0	1	0	0 (x_{10})
1	0	1	1	1 (x_{11})
1	1	0	0	0 (x_{12})
1	1	0	1	1 (x_{13})
1	1	1	0	0 (x_{14})
1	1	1	1	0 (x_{15})

   Der 4-Multiplexer sieht nun wie folgt aus: $x_0, x_1, \ldots, x_{15}$ sind die Eingänge, s_0, s_1, s_2, s_3 die Steuerleitungen und z der Ausgang. Die Steuerleitungen liefern über den 4-zu-16 Dekodierer $y_0, y_1, \ldots, y_{15}$. Über 16 AND-Gatter werden dann jeweils x_i und y_i für $0 \leq i \leq 15$ miteinander verknüpft und die 16 Ausgänge über ein ODER-Gatter zusammengeführt, das dann schliesslich die Ausgabe z liefert. Bei Eingabe einer 4-Bit Zahl s an den Steuerleitungen liefert der 4-Multiplexer nun die Ausgabe 0, wenn s keine Primzahl ist, und 1, wenn s eine Primzahl ist.

2. Die Wahrheitstabelle zum Volladdierer aus der Vorlesung lautet wie folgt:

x_0	y_0	u	s	u'
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Bilden der KNF für s liefert:

$$\begin{aligned} s &= (x_0 + y_0 + u)(x_0 + \overline{y_0} + \overline{u})(\overline{x_0} + y_0 + \overline{u})(\overline{x_0} + \overline{y_0} + u) \\ &= (x_0 + ((y_0 + u)(\overline{y_0} + \overline{u})))(\overline{x_0} + ((y_0 + \overline{u})(\overline{y_0} + u))) \\ &= (x_0 + (y_0 \text{ XOR } u))(\overline{x_0} + \overline{y_0 \text{ XOR } u}) \\ &= (x_0 \text{ XOR } y_0) \text{ XOR } u \end{aligned}$$

Bilden der DNF für u' liefert:

$$\begin{aligned} u' &= (\overline{x_0} y_0 u) + (x_0 \overline{y_0} u) + (x_0 y_0 \overline{u}) + (x_0 y_0 u) \\ &= (\overline{x_0} y_0 + x_0 \overline{y_0}) u + (x_0 y_0 + u\overline{u}) \\ &= (x_0 \text{ XOR } y_0) u + x_0 y_0 \end{aligned}$$

Man könnte auch einen Halbaddierer verwenden, da der Halbaddierer nur aus einem XOR-Gatter und einem AND-Gatter zusammengebaut ist. An den booleschen Ausdrücken für s und u' kann man erkennen, dass sich der Volladdierer aus zwei Halbaddierern und einem zusätzlichen AND-Gatter zusammenbauen lässt. Ingesamt wären in diesem Fall 2 XOR-Gatter und 3 AND-Gatter notwendig.

Aufgabe 3 (erstellt von KV):

1. Das Angebot sollte man nicht annehmen, da man keine Bonuspunkte bekommen kann. Annahme: Person P nimmt das Angebot an.

   (a) 1. Fall: P erklärt sich das Beispiel selbst. Dann hätte sich P nach Vertrag das Beispiel nicht selbst erklären dürfen. Widerspruch!
   (b) 2. Fall: P erklärt sich das Beispiel nicht selbst. Dann hätte sich P nach Vertrag das Beispiel selbst erklären müssen. Widerspruch!

2. Die Menge M kann es nicht geben. Annahme: Die Menge M gibt es.
   (a) 1. Fall: $M \in M$. Dann enthält M sich selbst, d.h. nach der Definition der Menge M gilt $M \notin M$. Widerspruch!
   (b) 2. Fall: $M \notin M$. Dann enthält M sich nicht selbst, d.h. nach der Definition der Menge M gilt $M \in M$. Widerspruch!

3. Tbd.

Aufgabe 4 (erstellt von KV):

1. $47 + 12 + 32 = O(1)$ gilt, da:
   Aus $47 + 12 + 32 \leq c \cdot 1$ folgt: $c \geq 91$
2. $2n^3 + 6n^2 + 5n + 47 = O(n^3)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, da:
   Aus $2n^3 + 6n^2 + 5n + 47 \leq c \cdot n^3$ folgt:
   $$2 + \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{47}{n^3} \leq 2 + 6 + 5 + 47 \leq c \text{ , d.h. } c \geq 60$$
3. $\sum_{i=0}^{n}(3i+1) = O(n^2)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$,, da:
   Aus
   $$\sum_{i=0}^{n}(3i+1) = 3 \cdot \sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1 = \frac{3n(n+1)}{2} + n = 1,5n^2 + 2,5n \leq c \cdot n^2$$
   folgt
   $$1,5 + \frac{2,5}{n} \leq c \text{ ,d.h. } c \geq 4$$
4. $\frac{n}{2} = \Omega(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, da:
   Aus $\frac{n}{2} \geq c \cdot n$ folgt $c \leq 0,5$.

5. $2^n = O(n!) = O(n^n)$ gilt, da für $n \geq 4$ gilt: $2^n \leq n! \leq n^n$.

   Induktionsanfang: $n = 4$. Es gilt:

$$2^4 = 16 \leq 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \leq 4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$$

   Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für $n \geq 4$

   Induktionsschritt: $n \to n + 1$. Es gelten:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq (n+1) \cdot 2^n \overset{IV}{\leq} (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{IV}{\leq} (n+1) \cdot n^n \leq (n+1)(n+1)^n \leq (n+1)^{n+1}$$

6. $10^{-7} n^{1,101} = \Theta(\sqrt{(n)})$ gilt nicht, da:

   Aus $10^{-7} n^{1,101} \leq c \cdot \sqrt{(n)}$ folgt: $c \geq 10^{-7} n^{0,601}$. Da $10^{-7} n^{0,601}$ für steigende n immer grössere Werte annimmt, existiert kein konstantes c mit der geforderten Eigenschaft.