

Musterlösung Blatt 4 Aufgabe 2

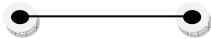
(erstellt von Verena Beran)

Vollständiger Graph mit $n=1,2,3,4,5$ Knoten

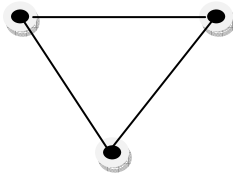
$n=1$:



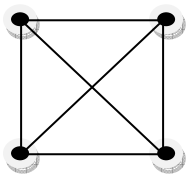
$n=2$:



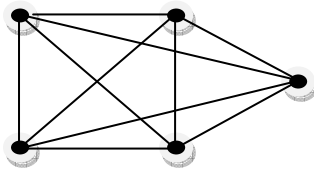
$n=3$:



$n=4$:



$n=5$:



1. Wie viele Kanten hat ein vollständiger Graph mit n Knoten?

- Jeder Knoten verbindet die anderen $\Rightarrow$ von jedem Knoten gehen $n-1$ Kanten weg
- Insgesamt hat der Graph n Knoten und von jedem dieser Knoten gehen $n-1$ Kanten weg
 $\Rightarrow n \cdot (n-1)$
- Jede Kante verbindet zwei Knoten, durch $n \cdot (n-1)$ zählt man jede Kante doppelt
 $\Rightarrow \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \text{Kantenanzahl eines vollständigen Graphen mit } n \text{ Knoten}$

$$a_n := \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Kommt in dem vollständigen Graphen ein weiterer Knoten dazu, müssen n Kanten hinzugefügt werden, damit man wieder einen vollständigen Graphen erhält

⇒ Graph mit n+1 Knoten:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= n + a_n \\ &= n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{2n}{2} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \end{aligned}$$

Beweis:

zu zeigen: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ gilt für Graph mit n Knoten

Induktionsanfang: n=1

$$\frac{1 \cdot (1-1)}{2} = 0$$

Induktionsannahme:

Für n Knoten gilt $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Induktionsschritt: n → n+1

$$n+1 \text{ Knoten: } \frac{(n+1) \cdot (n+1-1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot n}{2} = a_{n+1}$$

2. Ist die Summe der Grade der Knoten eines beliebigen Graphen gerade oder ungerade?

Überlegung: Summe der Grade der Knoten eines beliebigen Graphen = Anzahl Kanten * 2

Sei Kantenanzahl = n

⇒ 2n ist immer gerade, egal ob n gerade oder ungerade

Beweis:

Induktionsanfang: n=1

1 Kante bedeutet für die Summe der Grade: 2*1 = 2, 2 ist gerade

Induktionsannahme:

Die Summe der Grade der Knoten eines beliebigen Graphen ist gleich Anzahl Kanten $\cdot 2$, d.h. gerade

Induktionsschritt: $n \longrightarrow n+1$

Der Graph mit n Kanten erfüllt nach Induktionsannahme die Behauptung. Kommt jetzt eine neue Kante zu dem Graphen hinzu, so erhöht diese den Grad an zwei Knoten jeweils um 1, d.h. die Summe der Grade wird um 2 vergrößert und bleibt daher wiederum gerade.

$\Rightarrow$ Die Summe der Grade der Knoten eines beliebigen Graphen ist gerade

3. Ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad eines beliebigen Graphen gerade oder ungerade?

Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist immer gerade.

Beweis: Induktion über n , die Anzahl der Kanten

Induktionsanfang: $n=1$

Gegeben ist ein beliebiger Graph mit einer Kante, dieser Graph hat 2 Knoten mit ungeradem Grad.

Induktionsannahme:

Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad in einem Graph mit n Kanten ist immer gerade.

Induktionsschritt: $n \longrightarrow n+1$

Sei ein beliebiger Graph mit n Kanten gegeben. Nach Induktionsannahme erfüllt der Graph die Behauptung. Fügt man eine weitere Kante hinzu, so gibt es folgende Fälle für die beiden an der Kante beteiligten Knoten:

1. Aus 1 Knoten mit ungeradem Grad und 1 Knoten mit geradem Grad werden 1 Knoten mit geradem Grad und 1 Knoten mit ungeradem Grad. Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad bleibt gerade.
2. Aus 2 Knoten mit geradem Grad werden 2 Knoten mit ungeradem Grad. Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad bleibt gerade.
3. Aus 2 Knoten mit ungeradem Grad werden 2 Knoten mit geradem Grad. Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad bleibt gerade.

$\Rightarrow$ Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist immer gerade