Musterlösungen Übungsblatt 3

Aufgabe 1:

Als Axiome werden die folgenden Gesetze angenommen: Kommutativgesetz (K), Distributivgesetz (D), Neutralitätsgesetz (N) und Komplementärgesetz (I). Die folgenden Gesetze lassen sich aus diesen vier Gesetzen herleiten:

1. Assoziativgesetze

   Tbd.

2. Idempotenzgesetze

   Tbd.

3. Extremalgesetze

   Tbd.

4. Doppelnegationsgesetz (erstellt von KV)

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{x_0}} &\overset{\mathrm{N}}{=} \overline{\overline{x_0}}1 \\
&\overset{\mathrm{I}}{=} \overline{\overline{x_0}}(x_0 + \overline{x_0}) \\
&\overset{\mathrm{D}}{=} (\overline{\overline{x_0}}x_0) + (\overline{\overline{x_0}}\,\overline{x_0}) \\
&\overset{\mathrm{I}}{=} (\overline{\overline{x_0}}x_0) + 0 \\
&\overset{\mathrm{I}}{=} (\overline{\overline{x_0}}x_0) + (x_0\overline{x_0}) \\
&\overset{\mathrm{K}}{=} (\overline{\overline{x_0}}x_0) + (\overline{x_0}x_0) \\
&\overset{\mathrm{D}}{=} (\overline{\overline{x_0}} + \overline{x_0})x_0 \\
&\overset{\mathrm{K}}{=} (\overline{x_0} + \overline{\overline{x_0}})x_0 \\
&\overset{\mathrm{I}}{=} 1x_0 \\
&\overset{\mathrm{K,N}}{=} x_0
\end{aligned}
$$

5. Absorptionsgesetze

   Tbd.

6. De Morgan Gesetze (erstellt von KV)

   Der Nachweis, dass sich die De Morgan Gesetze herleiten lassen, erfolgt in drei Schritten: Zunächst wird gezeigt, dass $x_0 = \overline{x_1}$, wenn x_0 und

x_1 boolesche Ausdrücke sind mit $x_0x_1 = 0$ und $x_0 + x_1 = 1$. Danach genügt es zu zeigen, dass $(x_0x_1)(\overline{x_0}+\overline{x_1}) = 0$ und $x_0x_1 + (\overline{x_0}+\overline{x_1}) = 1$, denn dann folgt unmittelbar $\overline{x_0x_1} = \overline{x_0} + \overline{x_1}$.

(a) Seien x_0 und x_1 boolesche Ausdrücke mit $x_0x_1 = 0$ und $x_0+x_1 = 1$, so gilt:

$$\begin{aligned}
x_0 &\overset{\text{N}}{=} x_0 1 \\
&\overset{\text{I}}{=} x_0(x_1 + \overline{x_1}) \\
&\overset{\text{D}}{=} (x_0x_1) + (x_0\overline{x_1}) \\
&\overset{\text{Vor.}}{=} 0 + (x_0\overline{x_1}) \\
&\overset{\text{I}}{=} (x_1\overline{x_1}) + (x_0\overline{x_1}) \\
&\overset{\text{D}}{=} (x_1 + x_0)\overline{x_1} \\
&\overset{\text{K}}{=} (x_0 + x_1)\overline{x_1} \\
&\overset{\text{Vor.}}{=} 1\overline{x_1} \\
&\overset{\text{K,N}}{=} \overline{x_1}
\end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
(x_0x_1)(\overline{x_0} + \overline{x_1}) &\overset{\text{D}}{=} x_0x_1\overline{x_0} + x_0x_1\overline{x_1} \\
&\overset{\text{K,I}}{=} x_0\overline{x_0}x_1 + x_0 0 \\
&\overset{\text{I}}{=} 0x_1 + x_0 0 \\
&\overset{3}{=} 0
\end{aligned}$$

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
1 &\overset{\text{N}}{=} 1 \cdot 1 \\
&\overset{\text{I}}{=} (x_0 + \overline{x_0})(x_1 + \overline{x_1}) \\
&\overset{\text{D}}{=} x_0x_1 + x_0\overline{x_1} + \overline{x_0}x_1 + \overline{x_0}\,\overline{x_1} \\
&\overset{2}{=} x_0x_1 + x_0\overline{x_1} + \overline{x_0}x_1 + \overline{x_0}\,\overline{x_1} + \overline{x_0}\,\overline{x_1} \\
&\overset{\text{D}}{=} x_0x_1 + x_0\overline{x_1} + \overline{x_0}(x_1 + \overline{x_1}) + \overline{x_0}\,\overline{x_1} \\
&\overset{\text{K}}{=} x_0x_1 + \overline{x_0}(x_1 + \overline{x_1}) + x_0\overline{x_1} + \overline{x_0}\,\overline{x_1} \\
&\overset{\text{D,I}}{=} x_0x_1 + \overline{x_0}1 + (x_0\overline{x_0})\overline{x_1} \\
&\overset{\text{I}}{=} x_0x_1 + \overline{x_0} + 1\overline{x_1} \\
&\overset{\text{K,N}}{=} x_0x_1 + \overline{x_0} + \overline{x_1}
\end{aligned}$$

Anmerkung: Die Herleitung ist auch direkt durchführbar, wird dann allerdings einige Zeilen länger.

Die zweiten Gesetze folgen unmittelbar aus der Dualität, d.h. mit den entsprechenden Vertauschungen können die Beweise dazu analog zu den obigen durchgeführt werden.

Aufgabe 2 (erstellt von KV):

1. Beweis durch Umformung:

$$\begin{aligned}
(x_1(x_1+x_3)x_3) + ((\overline{\overline{x_1}}x_1)x_2) &\stackrel{\text{A1(4)}}{=} (x_1(x_1+x_3)x_3) + ((x_1x_1)x_2) \\
&\stackrel{\text{A1(2)}}{=} (x_1(x_1+x_3)x_3) + (x_1x_2) \\
&\stackrel{\text{D,K,A1(2)}}{=} (x_1x_3) + (x_1x_2) \\
&\stackrel{\text{D}}{=} x_1(x_3+x_2) \\
&\stackrel{\text{K}}{=} x_1(x_2+x_3)
\end{aligned}$$

2. Darstellung durch NOR-Gatter:

$$\begin{aligned}
x_1 + (x_2\overline{x_1}) &\stackrel{\text{D}}{=} (x_1+x_2)(x_1+\overline{x_1}) \\
&\stackrel{\text{I}}{=} x_1+x_2 \\
&\stackrel{\text{A1(4)}}{=} \overline{\overline{x_1+x_2}} \\
&\stackrel{\text{A1(2)}}{=} \overline{\overline{x_1+x_2}+\overline{x_1+x_2}}
\end{aligned}$$

Die Formel kann direkt in ein Schaltnetz bestehend aus NOR-Gattern übersetzt werden.

3. Darstellung durch NAND-Gatter:

$$
\begin{aligned}
& x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2} + x_3\overline{x_1} + \overline{x_4}x_3\overline{x_1} + x_4x_3\overline{x_2}x_1 \\
\overset{\text{D}}{=}\; & x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2} + (x_3\overline{x_1})(1 + \overline{x_4}) + x_4x_3\overline{x_2}x_1 \\
\overset{\text{A1(3)}}{=}\; & x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2} + x_3\overline{x_1} + x_4x_3\overline{x_2}x_1 \\
\overset{\text{D}}{=}\; & x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2} + x_3(\overline{x_1} + x_4\overline{x_2}x_1) \\
\overset{\text{D,A1(2),K,I}}{=}\; & x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2} + x_3\big((\overline{x_1} + x_4)(\overline{x_1} + \overline{x_2})(\overline{x_1} + x_1)\big) \\
\overset{\text{I}}{=}\; & x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2} + x_3\big((\overline{x_1} + x_4)(\overline{x_1} + \overline{x_2})\big) \\
\overset{\text{D,A1(2)}}{=}\; & x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2} + x_3(\overline{x_1} + x_4\overline{x_2}) \\
\overset{\text{D}}{=}\; & x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2} + x_3\overline{x_1} + x_3x_4\overline{x_2}) \\
\overset{\text{K,D}}{=}\; & x_3\overline{x_1} + x_4\overline{x_2}(x_3 + \overline{x_3}) \\
\overset{\text{I}}{=}\; & x_3\overline{x_1} + x_4\overline{x_2} \\
\overset{\text{A1(4)}}{=}\; & \overline{\overline{x_3\overline{x_1} + x_4\overline{x_2}}} \\
\overset{\text{A1(6)}}{=}\; & \overline{\overline{x_3\overline{x_1}x_4\overline{x_2}}} \\
\overset{\text{A1(2)}}{=}\; & \overline{\overline{x_3\overline{x_1x_1}}\;\overline{x_4\overline{x_2x_2}}}
\end{aligned}
$$

Die Formel kann direkt in ein Schaltnetz bestehend aus NAND-Gattern übersetzt werden.

Aufgabe 3:

Tbd.

Aufgabe 4:

Tbd.