Zeitdiskretisierung

1 Abtastung im Zeitbereich

1.1 Signaldarstellung

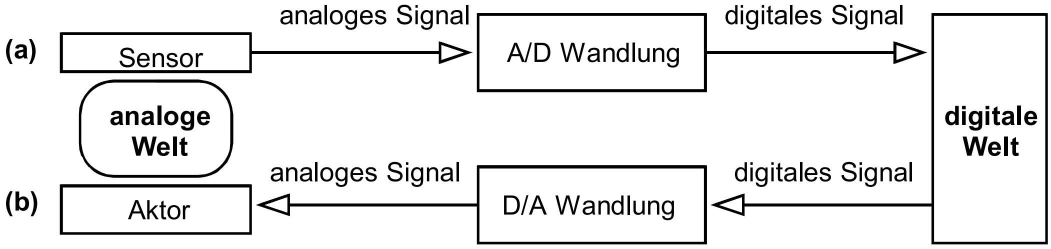


Bild 1.1-1: Beispiele für: **(a)** analog/digital Wandlung, **(b)** digital/analog Wandlung

Was ist ein Signal?

Ein Signal ist die physikalische Repräsentation einer Nachricht. Das Signal an sich ist unabhängig von dem Medium, welches das Signal transportiert. Beispiele: Schallwelle, elektromagnetische Welle, Spannung, Strom, Licht, Gas, Flüssigkeit, optische oder mechanische Signale, etc. In der Elektrotechnik interessieren uns in erster Linie elektrische Spannungen und Ströme als Signale. Sensoren und Aktoren vollziehen die Umwandlung elektrischer in nichtelektrische Signale.

Bild 1.1-1 veranschaulicht die beiden Umwandlungen von der analogen in die digitale und von der digitalen in die analoge Welt. Dabei ist erstere erheblich komplizierter, als die zweite, denn A/D Wandlung vollzieht sich meistens zweidimensional: in Zeit und Wert.

Zeitdiskrete Signale existieren nur in bestimmten Zeitpunkten t_n. Diese Zeitpunkte sind in der Regel als ganzes Vielfaches einer vorgegebenen Taktperiode $T_S=1/f_S$ definiert: $x_n = x(n) = x(t=nT)$. Entsteht ein zeitdiskretes Signal durch Abtastung aus einem analogen Signal, muß das Kriterium nach Nyquist bzw. Shannon erfüllt sein, um das originale Signal wieder herstellen zu können.

Wertdiskrete Signale können nur ein fest vorgegebenes Spektrum von Werten annehmen, die in der Regel ein ganzes Vielfaches einer kleinsten Stufe (engl.: least significant bit, LSB) sind. Diskrete Signalwerte entstehen durch Analog-Digital-Wandlung mit Hilfe sogenannter Analog/Digital-Wandler (Analog-to-Digital Converter, ADC) aus analogen Signalwerten. Ein D/A-Wandler (DAC) kann ein digitales Wort wieder in einen analogen Wert umsetzen.

Typischerweise haben wir es mit allen vier Signaldarstellungen zu tun:

- analog / analog: analoge Schaltungen, z.B. RC-Filter
- zeitdiskret / wertkontinuierlich: z.B. geschaltete Kapazitäten
- zeit kontinuierlich / wertdiskret: z.B. Ausgang eines D/A-Wandlers
- zeitdiskret / wertdiskret: z.B. Zahlenkolonne auf einer CD

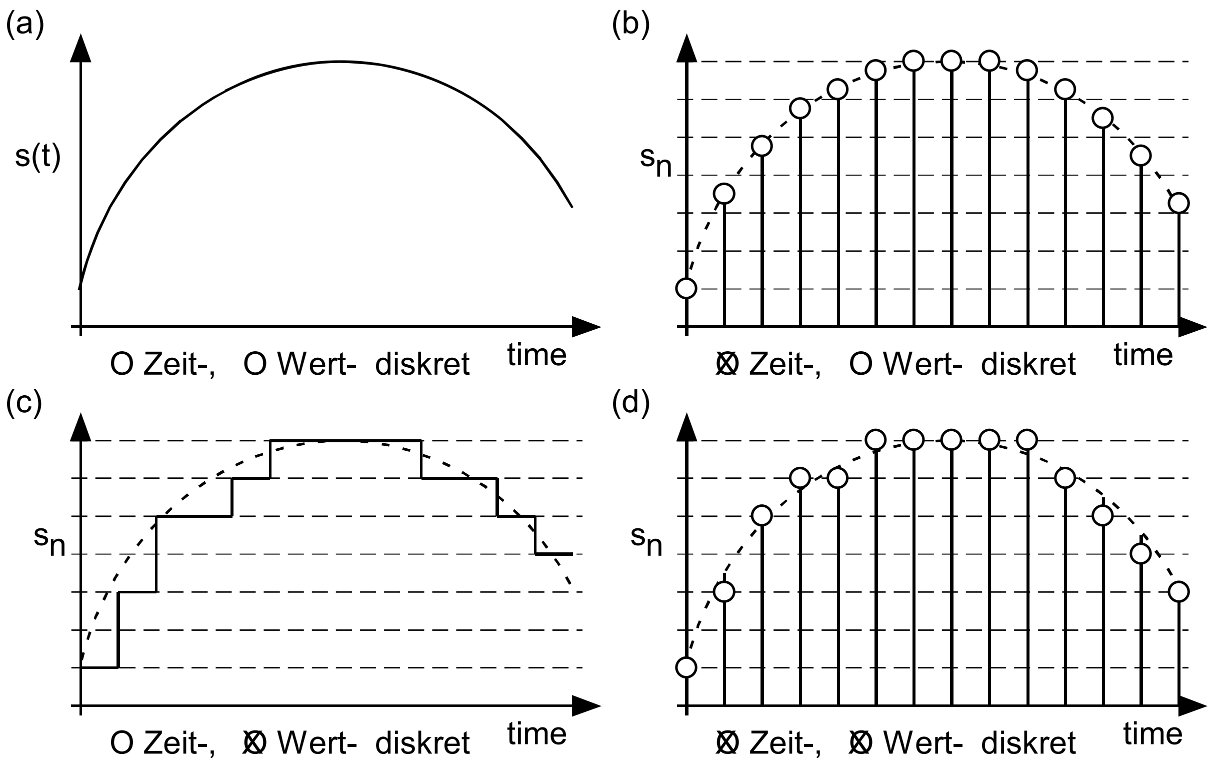
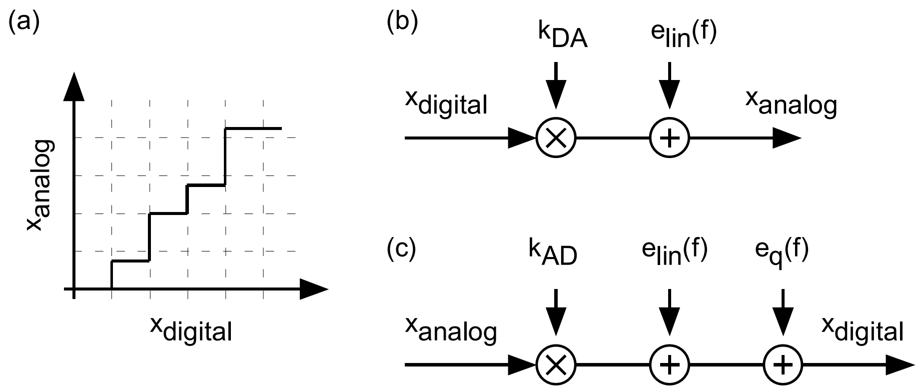


Bild 1.1-2: Signale: **(a)** analog, **(b)** zeit-, **(c)** wert-, **(d)** zeit- und wert-diskret

1.2 Quantisierung, Nichtlinearität und Rauschen

Bild 1.2-1:
(a) A/D und D/A Wandlung erzeugt Linearitätsfehler
(b) D/A-Wandler und
(c) A/D Wandler aus nachrichtentechnischer Sicht



Den D/A-Wandler (DAC) sehen wir in der Signalverarbeitung gemäß Bild 1.2-1 als Skalierung mit dem Faktor k_{DA} und entsprechnede Linearitätsfehler e_{lin} (siehe INL, DNL,...). Linearitätsfehler entsehen dadurch, daß gemäß Bild 1.2-1(a) Bit-Sprünge auf der digitalen Seite verschiedenen großen Sprüngen auf der analogen Seite entsprechen.Der Faktor k_{DA} wird typischerweise in V/Bit gemessen, kann aber ebenso gut mit Dimensionen wie A/Bit oder °C/Bit erscheinen. **Der DAC erzeugt kein Quantisierungsrauschen!** Er rundet nicht, sondern setzt lediglich M digitale in M analoge Werte um.

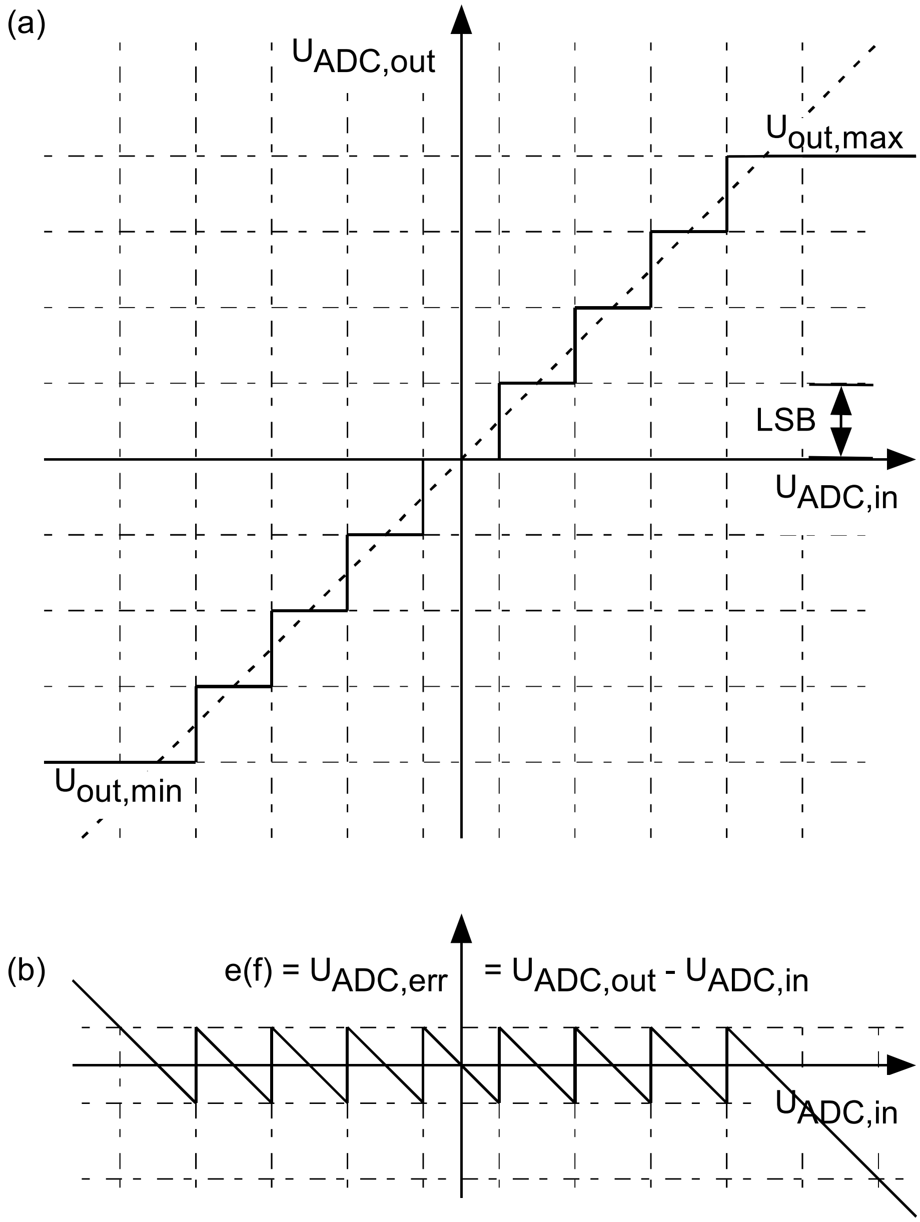
Der A/D-Wandler (ADC) verursacht gemäß Bildteil (c) erstens eine Saklierung mit dem Faktor k_{AD}, dessen physikalische Dimension in Regelschleifen meist durch die Forderung "$k_{AD} \cdot k_{DA}$ dimensionslos" definiert ist. Zweitens haben wir auch beim ADC einen

Linearitätsfehler. Drittens erzeugt der ADC zusätzlich ein Quantisierungsrauschen. In der Signalverarbeitung interessiert uns vor allem dessen Form über der Frequenzachse.

Da das **durch Nichtlinearitäten und Quantisierung entstehende Rauschen e(f)** nicht von der Frequenz abhängt, kann es bei hinreichend aktiven (engl.: „sufficiently busy“) Signalen als **weißes Rauschen** angenommen werden. Nicht hinreichend aktiv könnte z.B. der Füllstand eines Öltanks sein oder altersbedingte Änderungen von Bauelementen über Jahre hinweg.

Das Quantisierungsrauschen $e_q(f)$ entsteht nur beim ADC und nicht beim DAC.

Bild 1.2-2:



(a) Ideale Quantisierung in 9 Stufen.

(b) Quantisierungsrauschen mit Amplitude ½Δ (also ½ LSB)

1.3 Betrachtung der Abtastung analoger Signale im Zeitbereich

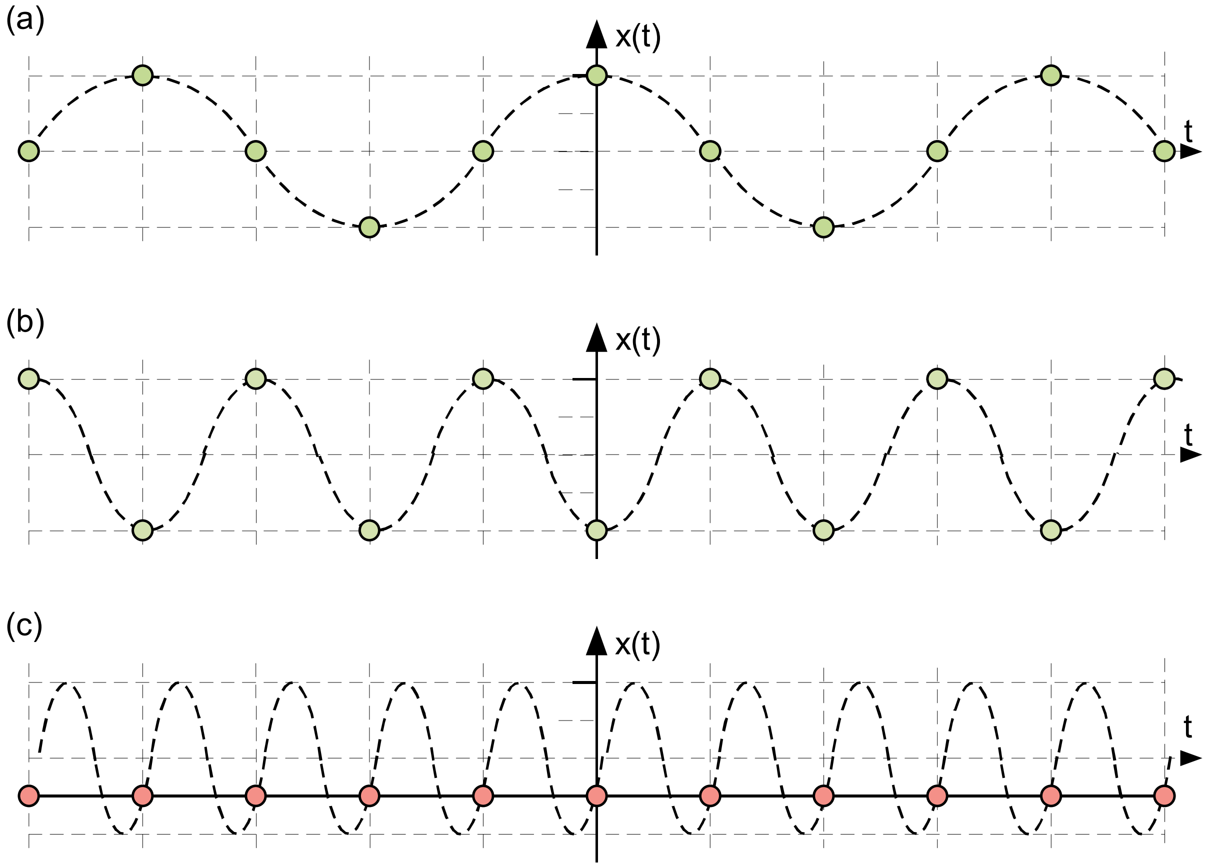


Bild 1.3-1: Abtastungen verschiedener Sinuswellen und aus den Abtastwerten (engl. samples) rekonstruierte Signale. Ist f_B die Frequenz der Welle, dann ist in **(a)** $f_S=4f_B$, in **(b)** $f_S=2f_B$, und in **(c)** $f_S=f_B$,

Bild 2.1 zeigt die Abtastung verschiedener sinusförmiger Wellen mit der Abtastfrequenz f_S bzw. der Taktperiode

$$T = 1 / f_S .$$

Beispiele für gebräuchliche Tastraten:

Telefon:	8 KHz (±3dB-Übertragungsbereich von 300...3400Hz)
Audiodaten von CD:	44,1 KHz
Audiodaten von DVD:	48,0 KHz
Digitales Fernesehen:	13,3 MHz

Übung 1.3-1: Bis zu welcher relativen Frequenz $F=f/f_S$ sind die in Bild 1.3-1 abgetasteten Kurven anhand der Abtastwerte rekonstruierbar? (Interpoliert werde mit sinusförmigen Wellen kleinstmöglicher Frequenz.)
Die Lösung finden Sie am Ende dieses Kapitels.

Nach Shannon und dem Kriterium von Nyquist ist eine Welle genau dann exakt rekonstruierbar, wenn die Takfrequenz mindestens doppelt so groß ist, wie die maximale Frequenz f_B des abgetasteten Signals. f_B ist also die maximal übertragbare Bandbreite:

$$f_B \leq ½\, f_S \quad \Leftrightarrow \quad f_S \geq 2\, f_B\,. \tag{1}$$

In der digitalen Signalverarbeitung interessieren uns häufig weniger die absoluten Frequenz f und ω eines Signals, als die normierten Frequenzen

$$F = f\,/\,f_S = \boldsymbol{fT} \quad \text{und} \quad \Omega = \omega/f_S = \boldsymbol{\omega T} = 2\pi F. \tag{2}$$

im Frequenzbereich, und aus dem Nyquist-Kriterium folgt die Forderung:

$$\boldsymbol{F \leq ½} \qquad <=> \qquad \boldsymbol{\Omega \leq \pi}\,. \tag{3}$$

Übung 1.3-2: Bild 1.3-2 zeigt drei Sinuswellen, die mit einer gegebenen Taktfrequenz abgetastet werden. Die Abtastzeitpunkte sind durch vertikale Linien gekennzeichnet. Zeichnen sie die abgetastete Impulsfolge und die daraus rekonstruierten Kurven ein. Berechnen sie für die Signal-Zeit-Diagramme jeweils die relative Frequenz F und die relative Kreisfrequenz Ω.

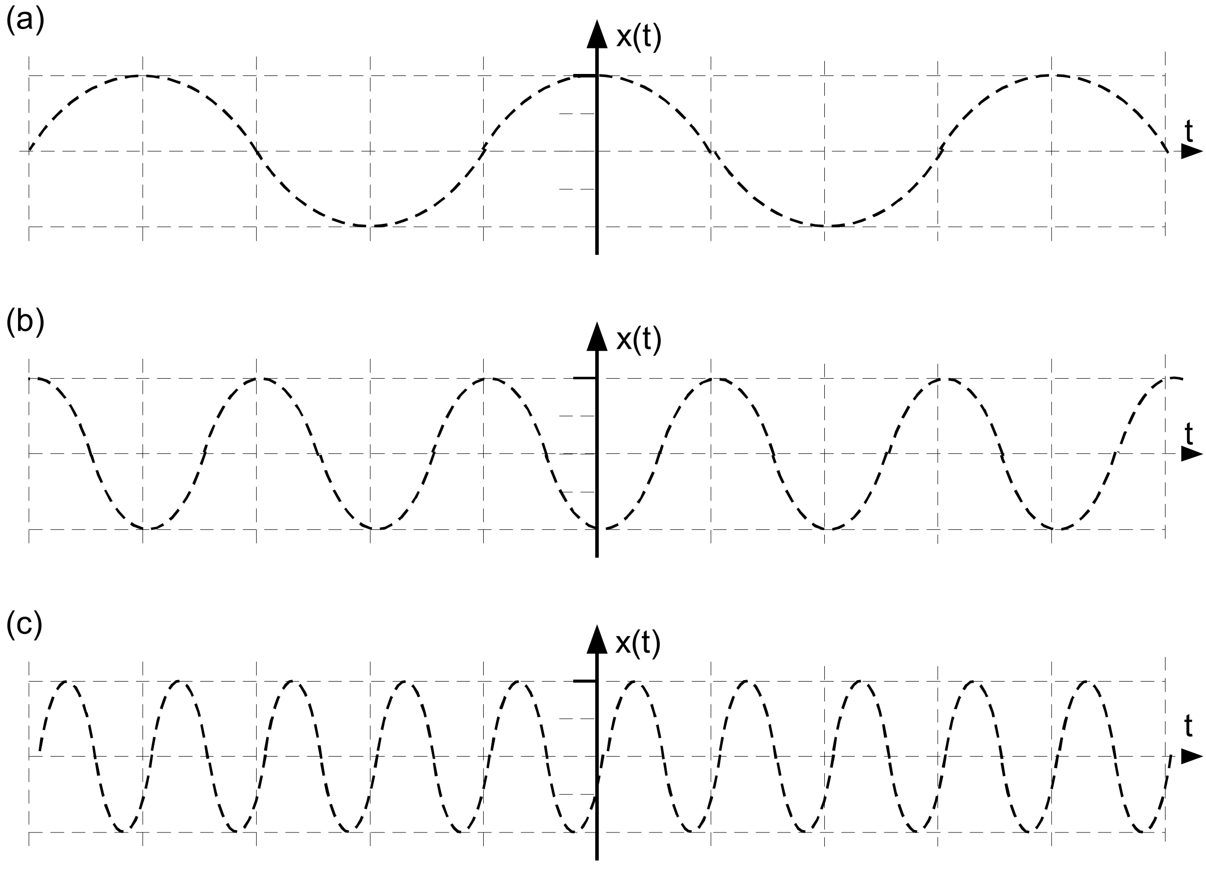


Bild 1.3-2: Abtastung verschiedener Sinuswellen.

Auch wenn die Abtastung das Kriterium von Shannon knapp erfüllt, können in der Praxis Probleme auftreten. In Bild 2.1-1(b) trifft der Abtaster genau die Minima und Maxima der Sinuswelle, daher kann diese mit Hilfe der Abtastwerte exakt rekonstruiert werden. Das ist jedoch selten der Fall. Man betrachte Bild 2.1-3:

- **Bild 1.3-3(a)** zeigt die Abtastung einer Sinuswelle mit $f_S=2f_B$, jedoch trifft der Abtaster nicht die Minima und Maxima der Sinuswelle. Rekonstruiert wird ein Signal mit verminderter Amplitude und Phasenverschiebung.
- **Bild 1.3-3 (b)** zeigt die Abtastung einer Sinuswelle mit $f_S=2f_B$, jedoch trifft der Abtaster exakt die Nulldurchgänge der Sinuswelle. Rekonstruiert wird ein Signal identisch Null.
- **Bild 1.3-3 (c)** zeigt die Abtastung einer Sinuswelle mit $f_S>2f_B$, das Kriterium von Shannon wird also übererfüllt. Rekonstruiert wird ein amplitudenmoduliertes Signal.

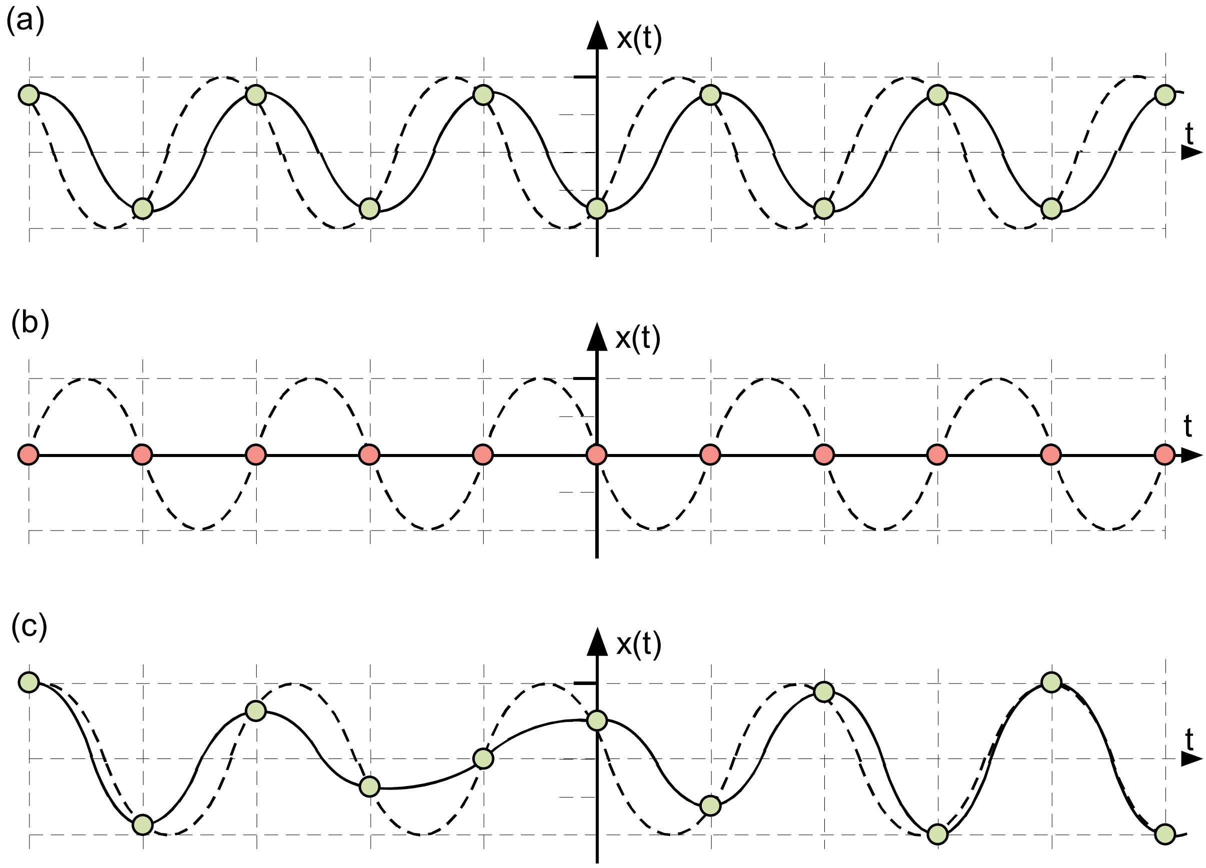


Bild 1.3-3: Geringfügige Überabtastung einer sinusförmigen Welle und rekonstruiertes Signal: Effekt einer Amplitudenmodulation.

Aufgrund dieser Effekte wird für die Praxis eine Abtastfrequenz von mindestens

$\boldsymbol{f_S = 4...10\, f_B}$ entsprechend einem „**O**ver **S**ampling **R**atio“ von $\boldsymbol{OSR=f_s/2f_B=2...5}$ (4)

empfohlen. Überabtastung ist auch deshalb vorteilhaft, weil mit jeder digitalen Abtastung ein Quantisierungsrauschen einhergeht. Da dieses unkorreliert und durch die Überabtastung hinreichend hochfrequent ist, läßt es sich durch Filterung entfernen. Das so gewonnene Signal ist durch die „Mittelwertbildung“ des Tiefpasses auf jeden Fall besser, als ein mit der Nyquist-Frequenz $f_S=2f_B$ abgetastetes Signal.

Übung 1.3-3: Bild 1.3-4 zeigt drei Sinuswellen, die mit einer gegebenen Taktfrequenz abgetastet werden. Die Abtastzeitpunkte sind durch vertikale Linien gekennzeichnet. Zeichnen sie die abgetastete Impulsfolge und die daraus rekonstruierten Kurven ein. Berechnen sie für die Signal-Zeit-Diagramme jeweils die relative Frequenz F und die relative Kreisfrequenz Ω.

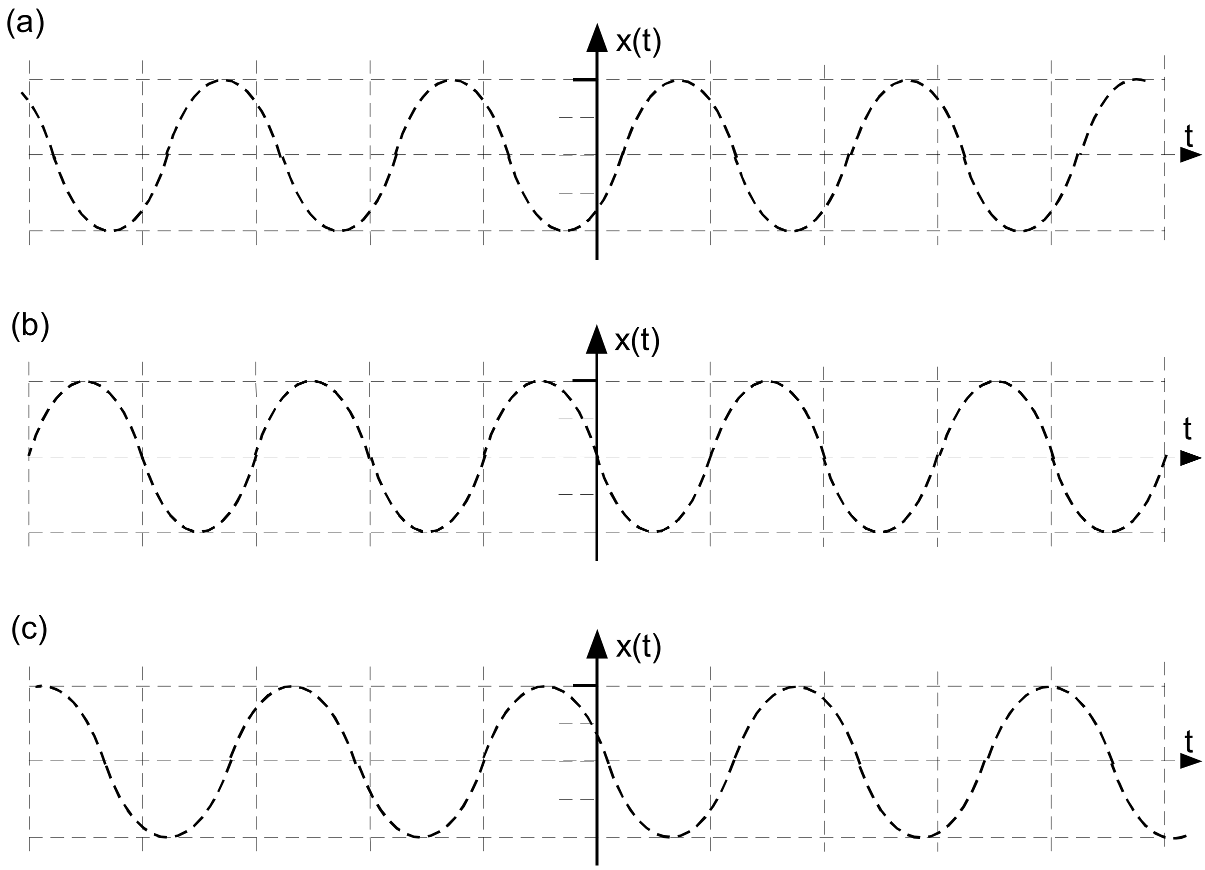


Bild 1.3-4: Abtastung verschiedener Sinuswellen.

Abtastung ist keine Tiefpaßfilterung! Auch bei der Abtastung sehr hochfrequenter Signale tastet der Abtaster die volle Amplitude. Das rekonstruierte Signal kann nur im Basisband $0 \leq f \leq ½f_S$ liegen. Der Taster tastet also die Energien aller Frequenzen in das Basisband. Dies nennt man Aliasing. Man verhindert es durch einen Tiefpaß, das sogenannte Anti-Aliasing-Filter, welches vor der Abtastung eingesetzt werden muß.

2 Auswirkungen der Abtastung im Frequenzbereich

2.1 Periodische Spektren und Aliasing

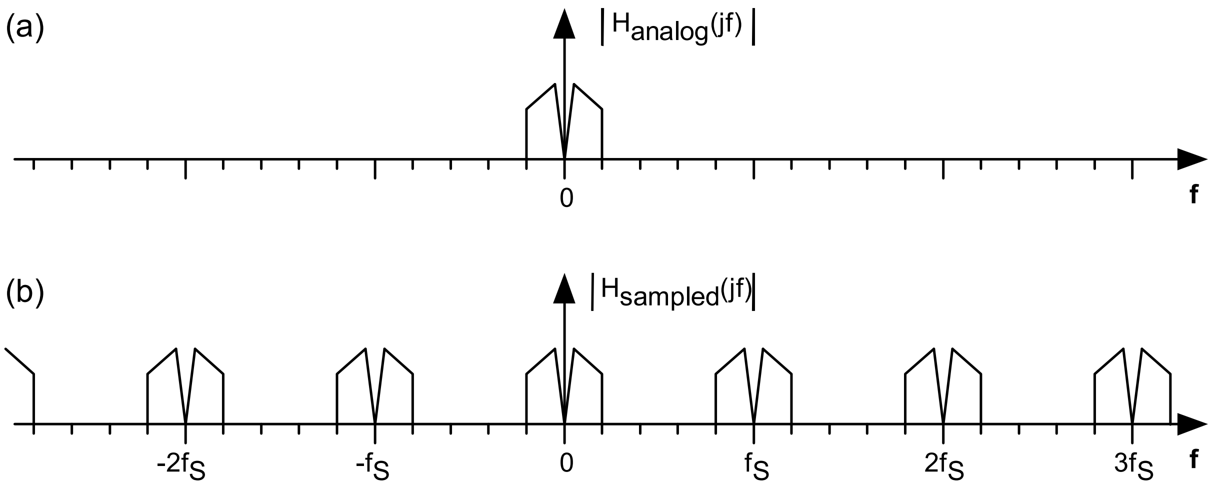


Bild 2.1-1: Spektrum eines Signals **(a)** vor und **(b)** nach der Abtastung.

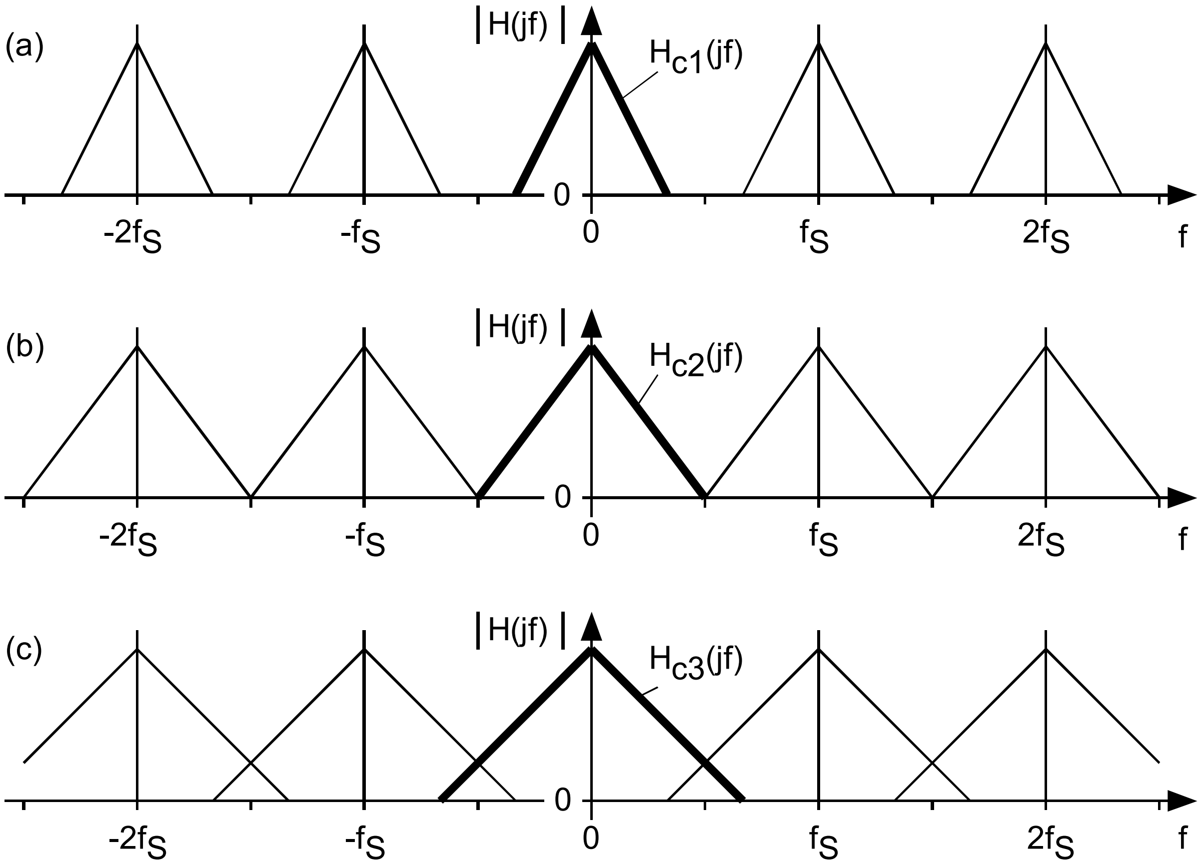


Bild 2.1-2: **(a)** Überabtastung, **(b)** Abtastung mit $f_S=2f_B$, **(c)** Unterabtastung und daher Aliasing: Die durch Abtastung periodisch wiederholten Spektren überschneiden sich. Da $f_{signal} > \frac{1}{2} f_S$ erscheint f_{signal} auf der Frequenz $f_{alias} = f_{signal} = N \cdot f_s$ im Basisband.

Bild 2.1-1(a) zeigt das Spektrum eines analogen Signals. Nach der Abtastung dieses Signals mit der Abtastfrequenz (engl.: sampling frequency) f_S ist das Spektrum im Prinzip das gleiche, wiederholt sich jedoch periodisch in ganzen Vielfachen von f_S. Bild 2.1-2(a-c) zeigt die Spektren von drei Signalen $H_{c1}(jf)$, $H_{c2}(jf)$ und $H_{c3}(jf)$ nach Abtastung mit der Frequenz f_S.

Frequenzspektren reeller Signal sind symmetrisch um f=0: Im Zeitbereich reelle Wellen haben ein um f=0 symmetrisches Frequenzspektrum. Dies ist u.a. aus der den Funktionen cos und sin ersichtlich: $\cos(\omega t)=½(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})$ und $\sin(\omega t)=(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})/(2j)$. In beiden Fällen verteilt sich die Energie gleichermaßen auf die positive und negative Frequenz ω und -ω.

Aus Bild 2.1-2 ist ersichtlich, daß sich die Spektren nur dann eindeutig trennen lassen, wenn für die Bandbreite des abgetasteten Signal gilt: $f_B \leq ½ f_S$. Das Abtasttheorem von Shannon sagt: Eine Zeitfunktion x(t) wird eindeutig durch die Abtastwerte x(nT) abgebildet, wenn

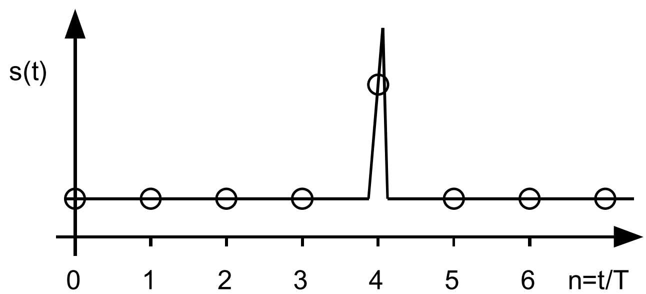
- x(t) eine bandbegrenzte Fourier-Transformierte X(jf), wobei X(jf) = 0 für $f>f_B$ besitzt und
- $1/T_S = f_S > 2f_B$

Aliasing. Bild 2.1-2(c) zeigt, was die Abtastung einer Frequenz $f>½f_S$ verursacht: Die rekonstruierte Welle findet man auf einer Frequenz $f_{alias}=f_{in}-N{\cdot}f_s$, wobei n eine ganze Zahl ist, die so gewählt werden muß, daß das Ergebnis im Bereich ±½fs liegt. Wegen der Symmetrie der Frequenzen um f=0 können wir auch mit negativen Frequenzen arbeiten. Vergleiche die Formel für die Aliasfrequenz mit der mit der Formel für den Quantisierungsfehler e_q:

- $\boxed{f_{alias} = f_{in} - M{\cdot}f_s = \mathbf{round}(f_{in}/f_s), \quad \text{so dass } f_{alias} \leq ½ f_s.}$
- $\boxed{e_q = U_{in} - N{\cdot}\Delta = \mathbf{round}(U_{in}/\Delta), \quad \text{so dass } e_q \leq ½\Delta.}$

Bedenke: Aliasing ist prinzipiell etwas anderes als Tiefpaßfiltern! Ein Tiefpaß würde auf einen kurzen Störimpuls am Ausgang kaum reagieren, würde ihn bildlich gesprochen „abschneiden". Der Abtaster dagegen nimmt die Funktionswerte $x(nT)$ auf und kann dabei auch sehr kurze Impulse treffen, wie in Bild 2.1-3 dargestellt. Die rekonstruierte Funktion muß bei der Wiedergabe durch diese Werte laufen und im Frequenzbereich 0≤f≤1/2T liegen.

Bild 2.1-3:
Wenn der Abtaster einen kurzen Störimpuls trifft, reicht er ihn - im Gegensatz zum Tiefpaß - in voller Höhe durch. Die Rekonstruktion erfolgt im Frequenzbereich f≤1/2T.



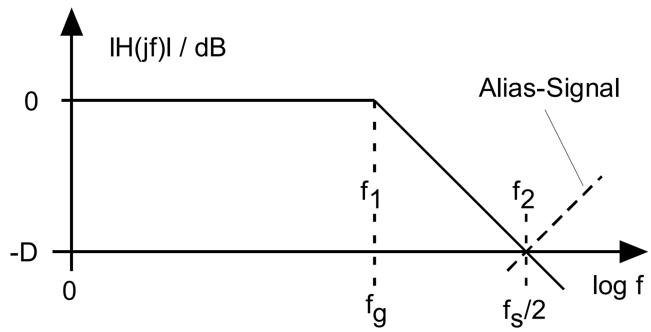
Aufgabe 2.1: Ein Musikstück wird mit einer Tastfrequenz von f_S=10 KHz digitalisiert. Der Musiker spielt einen Akkord mit 3 KHz, 6 KHz, 12 KHz und 24 KHz. Welche Frequenzen hören wir bei der Wiedergabe des Stückes?

2.2 Anti-Aliasing-Filter

2.2.1 Anti-Aliasing-Filter für Nyquist-Tastung

Um Aliasing zu vermeiden, findet man vor einer Abtastung in der Regel das sogenannte Anti-Aliasing-Filter. Das ist ein Tiefpaß, welcher die Bandbreite des Eingangssignals entsprechend der Abtastfrequenz und der geforderten Unterdrückung von Aliasing-Rauschen begrenzt.

Bild 2.2.1:
Zur Dimensionierung eines Anti-Aliasing-Filters



Aufgabe: Ein Telefonsignal werde mit einer Frequenz von f_S=8 KHz abgetastet. Garantiert wird dem Kunden eine 3dB-Grenzfrequenz von f_g=3,4 KHz. Aliasing-Rauschen soll um 60 dB unterdrückt werden. Wie steilwandig bzw. von welcher Ordnung N muß das Anti-Aliasing-Filter sein?

Lösung: Mit 8 KHz kann eine Bandbreite von $f_s/2$=4 KHz übertragen werden. Frequenzen über 4KHz werden zu Aliasing-Rauschen. Das Filter muß also von f_c=3,4 KHz bis $f_s/2$=4 KHz einen Faktor 1000 oder mit D=60 dB unterdrücken. Die Steilwandigkeit des Filters muss

60dB / log(4KHz/3,4KHz) = 60 dB / 0,071 = 850 dB / dec

betragen. Dazu benötigt es mit $f_2=f_s/2$ und $f_1=f_g$ die Ordnung

$$O=\frac{D_{dB}}{20dB\cdot\lg\left(\frac{f_2}{f_1}\right)}\xleftrightarrow{f_1=f_g,f_2=f_s/2}\frac{D_{dB}}{20dB\cdot\lg\left(\frac{f_s}{2f_g}\right)}=\frac{60dB}{20dB\cdot\lg\left(\frac{4000Hz}{3400Hz}\right)}=42{,}5.$$

wobei $lg(x)=log_{10}(x)$. Auch um das in das Basisband getastete Rauschen zu minimieren, wird die Grenzfrequenz f_g des Anti-Aliasing-Filters in der Regel so knapp wie möglich bemessen.

Ein Filtertyp, der sich für diese Aufgabe anbietet, ist das sogenannte Butterworth-Filter. Ein Butterworth-Filter N-ter Ordnung hat die Eigenschaft $|H_{BW}(jf)|=\frac{1}{\sqrt{1+(f/f_g)^{2N}}}$

Das Butterworth-Filter ist
- maximal flach, da die ersten 2N-1 Ableitungen dieser Funktion in f=0 verschwinden.
- $|H_{BW}(jf_g)|$=-3dB, wobei f_g der Schnittpunkt der Asymptoten ist.

2.2.2 Anti-Aliasing-Filter für Übertastung

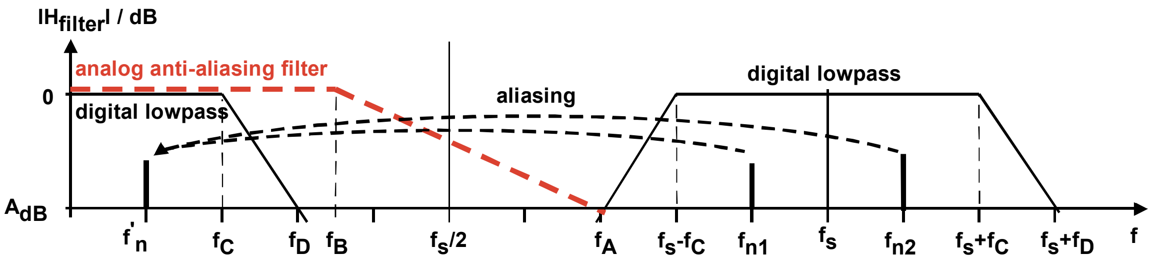


Fig. 2.2.2: Situation in frequency domain.

Due to oversampling the anti-aliasing filter was shifted to the digital side, haveng cut-off frequency f_C and obtaining damping at f_D. On the digital side, any frequency domain characteristics is periodic in sampling frequency f_s.

If an analog anti-aliasing lowpass is required, then it may be strongly relaxed as attenuation needs to be obtained at $f_A = f_S - f_D$.

In der Realität geht man häufig anders vor als im obigen Beispiel: Es wird mit hoher Taktfrequenz $f_{S,in} = OSR \cdot f_S$ abgetastet, so daß man mit einem sehr einfachen Anti-Aliasing-Filter auskommt. Das steilwandige Filtern und Herabsetzen der Frequenz („Dezimation“) erfolgt dann im digitalen Bereich. Die Abstimmung der Filter zeigt Fig. 2.2.2.

Das zeitkontinuierliche (analoge) Filter muss bei

$$f_A = f_s - f_D$$

bei Bandbreite

$$f_B \geq f_C$$

die geforderte Sperrdämpfung erreichen. Mit digitalen Filter kann dann steilwandig mit der cut-off Frequenz f_C die bnötigte Bandbreite eingestellt werden. Bei f_D, wo das digitale Filter die geforderte Sperrdämpfung erreicht, darf dann die minimale Tastfrequenz $f_{s,low}/2$ liegen.

2.3 Abtast-Halte-Glied (Sample & Hold bzw. Track & Hold)

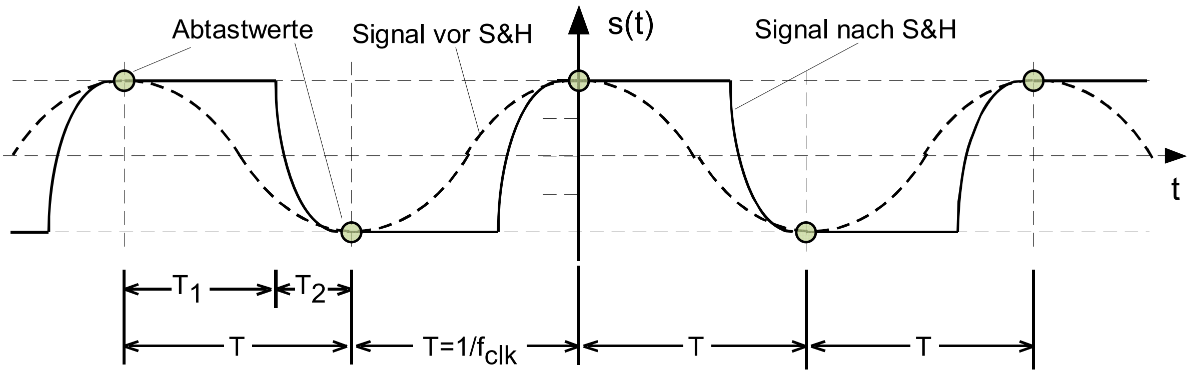


Bild 2.3-1: Abtastung einer Sinusfunktion (gestrichelt) mit der Nyquist-Frequenz. Um dem ADC Zeit zu geben, hält das Folge&Halte-Glied (engl. Track & Hold: T&H) die getasteten Werte fest.

Bild 2.3-1 zeigt ein Signal s(t), das an der Grenze der von Shannon erlaubten Abtastrate abgetastet wird. Das Abtast-Halte-Glied (mathematisch: sample & hold (S&H), real: track & hold (T&H)) hält den getasteten Wert über dem Zeitintervall T_1. Ohne T&H könnte sich das Signal vom Minimum bis zum Maximum ändern, während der A/D-Wandler versucht, es zu approximieren. Daher hält ein T&H Schaltkreis die abgetasteten Werte für die Zeitspanne T_1=T-T_2 konstant. Dabei ist T=1/f_S und T_2 die vom T&H-Glied benötigte Einschwingzeit. Die maximal mögliche Taktfrequenz ist damit

$$f_{S,\max} = \frac{1}{T_{S,\min}} = \frac{1}{T_1 + T_2},$$

so daß die durch den ADC festgelegte Grenzfrequenz f_{max} = 1/T nicht erreicht werden kann. Der ideale S&H würde gemäß Bild 2.3-2(a, b) unendlich kurz (mit Dirac-Impulsen) tasten. Dies ist unrealistisch. Ein Beispiel für eine realistische T&H Schaltung und Taktung werden. in Bild 2.3-2(c, d) gezeigt.

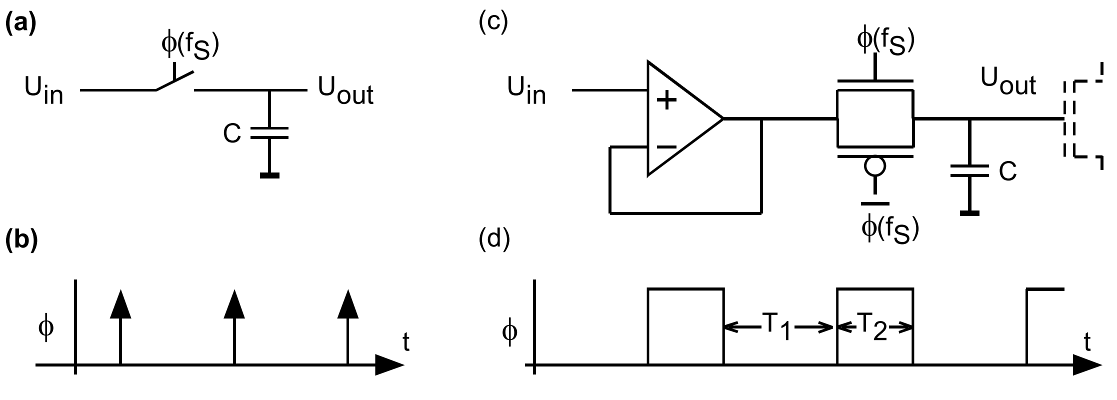


Bild 2.3-2: S&H Schaltungen **(a)** ideal mit **(b)** Taktung mit idealen Dirac-Stößen, **(c)** mögliche Realisierung mit **(d)** endlichen Taktphasen T_1, T_2.

3 A/D Wandlersystem

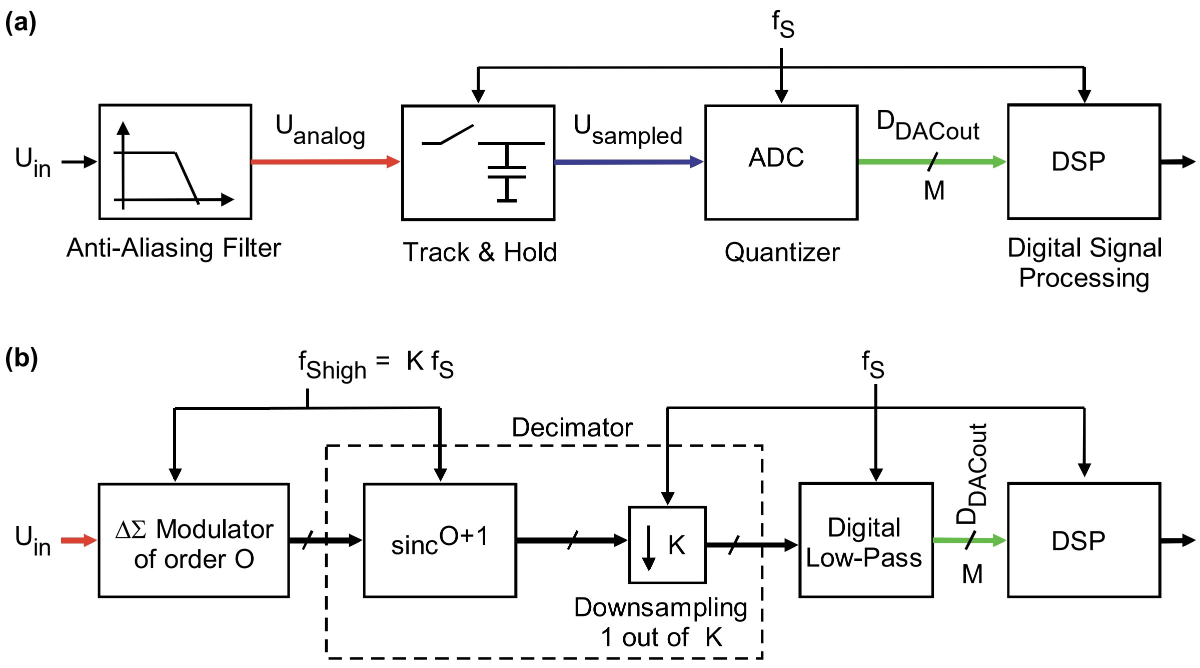


Bild 3:

(a) System zur Umwandlung eines analogen Signals in einen digitalen Datenstrom.
(b) Als Ausnahme hat der ΔΣ-Modulator die Tiefpass-Filter nach dem ADC.

Bild 3(a) zeigt ein komplettes System zur A/D Wandlung bestehend aus Anti-Aliasing- (AA-) Filter, Abtast-Halte-Glied und Quantisierer. Wichtig ist: Das Anti-Aliasing-Filtern muss vor dem A/D-Wandler stattfinden.

Bild 3(b) illustriert den Unterschied für den ΔΣ-Modulator, bei welchem die Tiefpass-Filterung nach der Abtastung geschieht. Taster und A/D-Wandler sind hier im ΔΣ-Modulator enthalten. Beim diesem wird das Anti-Aliasing-Filtern im wesentlichen auf der digitalen Siete nach dem A/D-Wandler geleistet, vor dem Modulator benötigt man keine oder schwächere Tiefpässe. Diese Technikwird of angewendet wenn man - z.B. in kleinen Sensoren - keinen Platz für ein analoges Anti-Aliasing-Filter aber auf der digitalen Seite noch Rechenleistung übrig hat. An erster Stelle kommt also der Bedarf nach einer schnelleren Tastrate, um die AA-Filter vereinfachen oder weglassen zu können, und wenn man schon übertastet, dann kann man die Präzision des Wandlers mit dem ΔΣ-Verfahren erhöhen oder die Bitbreite des ADCs im Modulator verringern. Das Tiefpassfiltern ist eine Mittelung mit konstanter Verstärkung für die Frequenzen des Basisbandes, wobei jeweils K Tastwerte zu einem verrechnet werden.

4 Wechseln von Tastraten

4.1 Der Dirac-Impuls

Der Dirac-Impuls kann als unendlich dünn und unendlich hoch mit einer Fläche (und somit einem Integral) von 1 angenommen werden. Das Integral über $a \cdot \delta(t-t_1)$ ist a.

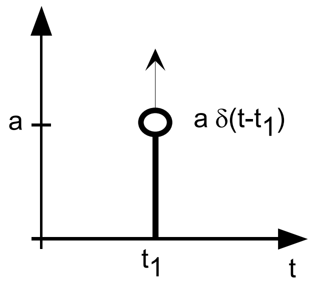
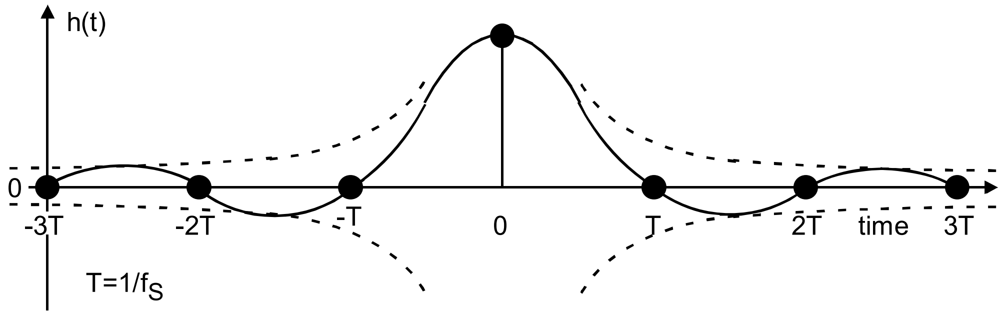


Bild 4.1: Dirac-Impuls

4.2 Die Impulsantwort des idealen Tiefpasses

Bild 4.2: Ausschnitt aus Impulsantwort des idealen Tiefpasses mit Grenz-frequenz $f_S/2$.



Die Impulsantwort des idealen Tiefpasses mit der Grenzfrequenz f_C ist die eine si-Funktion gemäß

$$\mathrm{si}(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x = \frac{1}{x} \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} ... \right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} ...$$

welche die gleichen Nullstellen wie eine Sinusschwingung mit der Frequenz f_C hat. Für $x \ll 1$ folgt daher

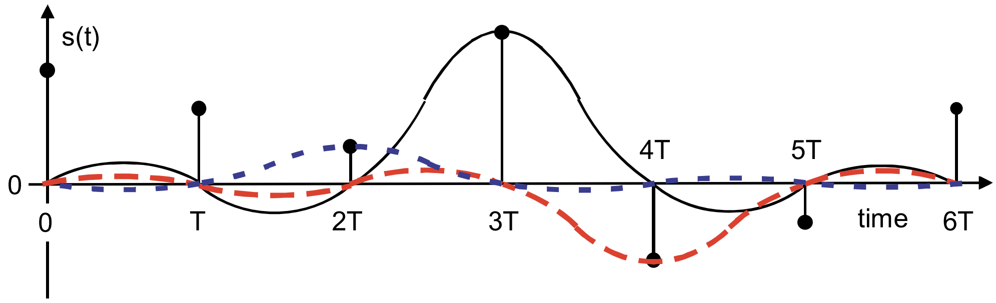
$$\mathrm{si}(x) \cong 1 - \frac{x^2}{3!} \xrightarrow{x \to 0} 1$$

Die Impulsantwort eines digitalen Tiefpasses ist eine Abtastung der Impulsantwort des analogen Tiefpasses. Für $f_C = f_S/2$ ergibt sich ein Allpass mit nur einem Tap ungleich Null. Alle anderen Taps liegen auf den Nullstellen. (Ein solcher Tiefpass kann real nicht exisiteren, da er nicht kausal ist, d.h. er beginnt mit seiner Impulsantwort bevor der Impuls eintrifft.)

In der englischsprachigen Literatur und Software (beispielsweise MatLab) findet man statt der si-Funktion häufig die sinc-Funktion, wobei sinc(x) = si(πx) = sin(πx)/(πx).

4.3 Interpolation einer getasteten Funktion mit idealem Tiefpaß

Bild 4.3: Interpolation mit idealem Tiefpaß mit Grenzfrequenz $f_S/2$.



In Bild 4.3-1 sind beliebige Abtastwerte $s_n(t_n)$ zu den Zeitpunkten $t_n=nT$ eingezeichnet. Die Übersichtlichkeit halber sind nur drei Impulsantworten des idealen Tiefpasses mit Grenzfrequenz $f_C=f_S/2$ eingezeichnet: $h(2T)$ blau gepunktet, $h(3T)$ schwarz durchgezogen und $h(4T)$ rot gestrichelt. Jede Impulsantwort läuft durch den Impuls, von dem sie getriggert wird und liefert auf allen anderen Zeitpunkten t_n den Beitrag 0. da der TP ein LZI-System ist, summiert er alle Impulsantworten. Diese Summe muss folglich exakt durch die gegebenen Eingangsimpulse laufen.

Da jede einzelne Kurve $h_n(t)$ unendlich glatt (d.h. unendlich oft stetig differenzierbar) ist, muß auch die interpolierende Kurve als Summe aller Einzelfunktionen $h_n(t)$ unendlich glatt sein. Diese Summation von skalierten "Shape Functions" (in diesem Falle si-Funktionen), die nur in einem Stützpunkt ungleich Null und in allen anderen Stützpunkten gleich Null sind, ist übrigens eine in der Mathematik übliche Interpolationstechnik (z.B. Lagrange-Interpolation.)

4.4 Redundante Erhöhung der Tastrate, Upsampling

Von einer CD komme der Datenstrom einer Musikaufnahme mit einer Abtastrate von 44,1 KHz, so daß Frequenzen bis 22,06 KHz wiedergegeben werden können. Bild 4.4(a) zeigt als Beispiel einen Datenstrom und ein rekonstruiertes Signal. Bildteil (b) verdeutlicht, daß gute analoge Filter benötigt werden, um das nützliche Spektrum im Basisband $f_B \leq ½f_S$ vom Aliasing-Rauschen aus dem Spektrum um $f=f_S$ zu trennen.

Wenn wir mit digitalen Filtern eine Interpolation des Signals auf eine erhöhte Taktfrequenz gemäß Bildteil (e) erreichen können, sind die Anforderung an die analogen Filter zur Trennung der Spektren um f=0 Hz und um $f=f_2$ deutlich geringer, wie man aus dessen Übertragungsfunktion $|H_{TP,ana}(f)|$ ersieht. Dazu wird die Taktfrequenz im Beispiel von f_S auf $f_2=4\cdot f_S$ erhöht.

Redundant ist diese Erhöhung der Tastrate (Upsampling) deshalb, weil wir ohne Informationsverlust die eingefügten Tastwerte (Samples) wieder entfernen können, ws man als Downsampling oder Dezimation bezeichnet.

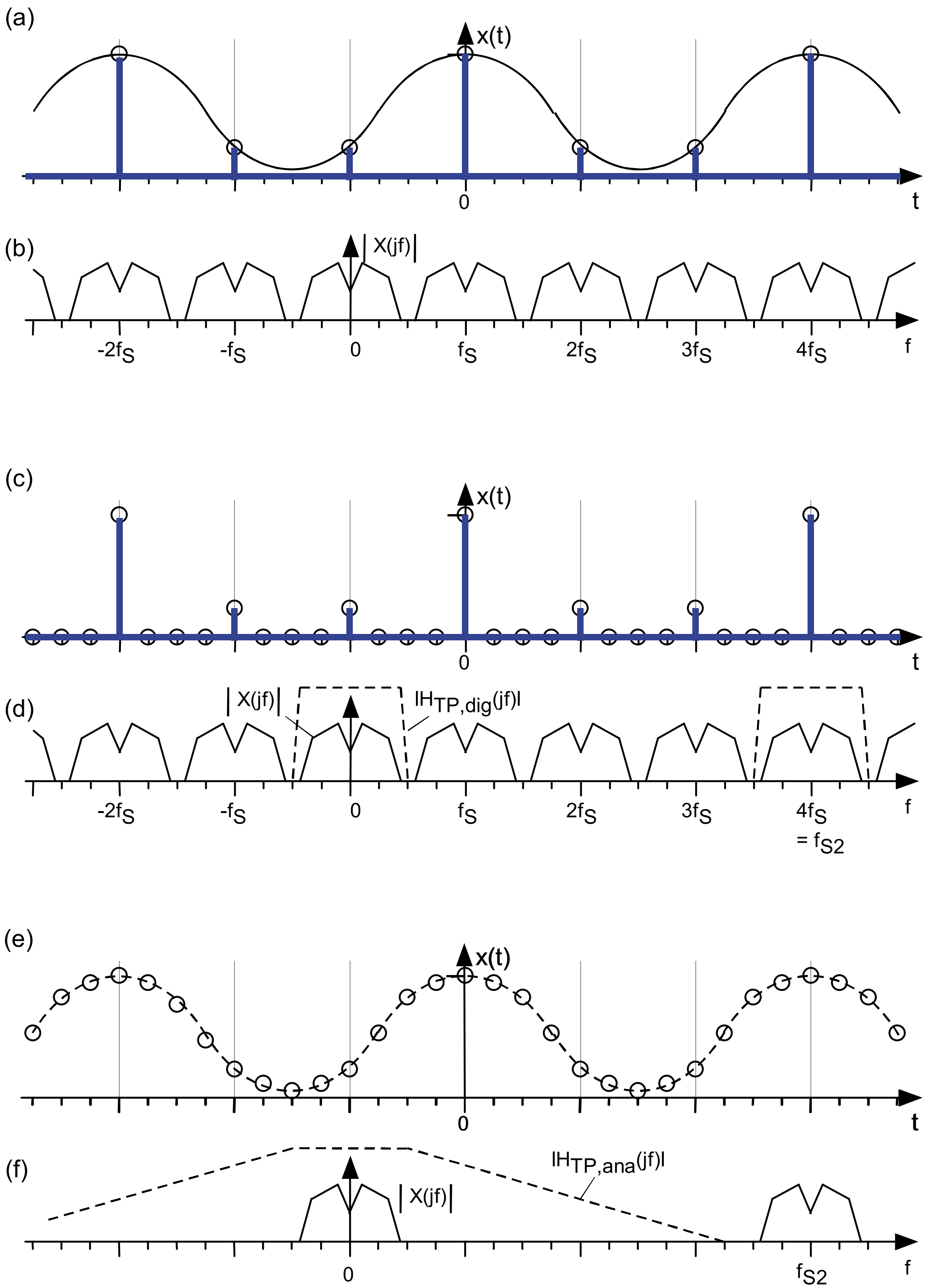


Bild 4.4: Überabtastung bei der Wiedergabe durch Einfügen neuer Impulse mit dem Wert Null und anschließender Tiefpaßfilterung.

Das Vorgehen in Bild 4.4:

- **Bildteil (a)** zeigt ein analoges Signal als Hüllkurve und Ursprung einer Impulsfolge mit einer Abtastfrequenz f_S etwas höher als $2f_B$.
- **Bildteil (b)** zeigt das Frequenzspektrum der Impulsfolge von Bildteil (a).
- **Bildteil (c)** zeigt die gleiche Situation wie Bildteil (b), mit dem Unterschied, daß nun in jede Lücke zwischen zwei Tastwerten 3 Nullwerte gelegt wurden. DAzu musste die Tastfrequenz auf $f_2=4f_S$ erhöht werden.
- **Bildteil (d)** zeigt das Frequenzspektrum der Impulsfolge von Bildteil (c). Da sich am Verlauf der Zeitbereichsfunktion gegenüber (a) durch das Einfügen der Nullen nichts geändert hat, kann sich auch das Frequenzspektum gegenüber (b) nicht verändert haben.
- **Bildteil (e)** zeigt die Situation nach Anwendung des digitalen Tiefpasses $H_{TP,dig}(f)$, der in (d) gestrichelt angedeutet ist.
- **Bildteil (f)** zeigt die zugehörige Situation im Frequenzbereich: Die Spektren um f_S, $2f_S$ und $3f_S$ wurden vom digitalen Tiefpas entfernt. $H_{TP,ana}(f)$ deutet des analoge Glättungsfilter an, welches vermutlich nicht benötigt werden wird, da Menschen Frequenzen um f_{S2} nicht hören können.

Anmerkung: Sehr steilwandige digitale Filter lassen sich heutzutage leichter bauen, als sehr steilwandige analoge Filter. Zudem ist die Übertragungsfunktion eines digitalen Filters exakt rekonstruierbar, während das analoge Filter stark von Baulementetoleranzen abhängt.

4.5 Dezimation (=Down-Sampling)

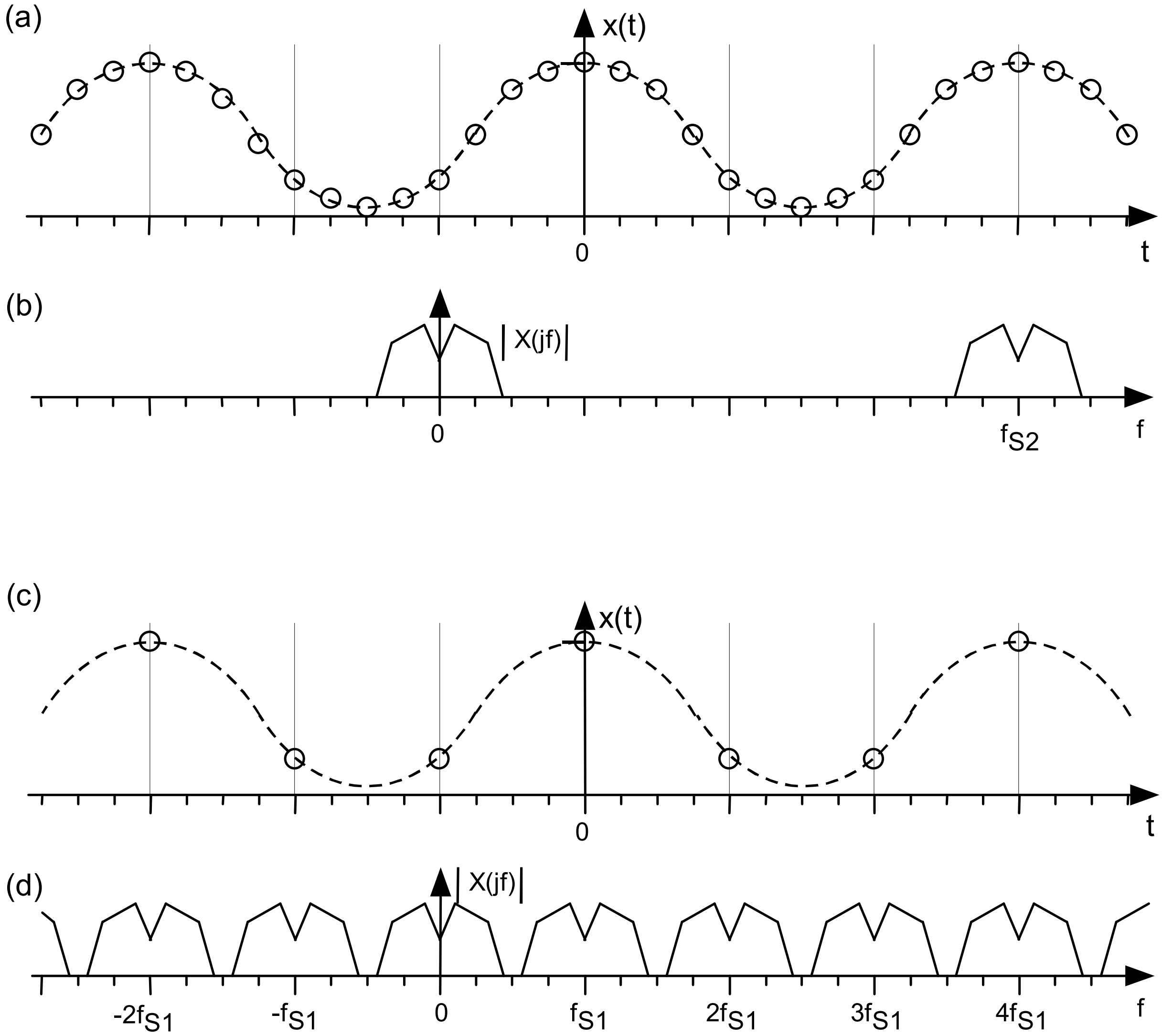


Bild 4.5: Dezimation eines Datenstroms um den Faktor 4.

Dezimation oder Down-Sampling ist Reduktion der Tastrate durch entfernen von Tastwerten. Es ist die Umkehrung der im vorherigen Kapitel gezeigten Erhöhung der Tastrate.

Das Vorgehen in Bild 4.5:

- **Bildteil (a)** zeigt ein bandbegrenztes, digitales Signal mit Überabtastrate *OSR*>4.
- **Bildteil (b)** zeigt das Spektrum zu Bildteil (a).
- **Bildteil (c)** zeigt das um den Faktor 4 dezimierte Signal aus (b): 3 von 4 Tastwerden wurden entfernt.
- **Bildteil (d)** zeigt das Frequenzspektrum der Impulsfolge von Bildteil (c) nach Reduktion der Tastrate um den Faktor 4.

Merke: Dezimation oder Down-sampling ist die Reduktion der Tastrate eines Zeitdiskreten Signals. Ihr geht typischerweise mit ein Tiefpass voran um Aliasing zu vermeiden.

4.6 Unterabtastung (=Sub-Sampling)

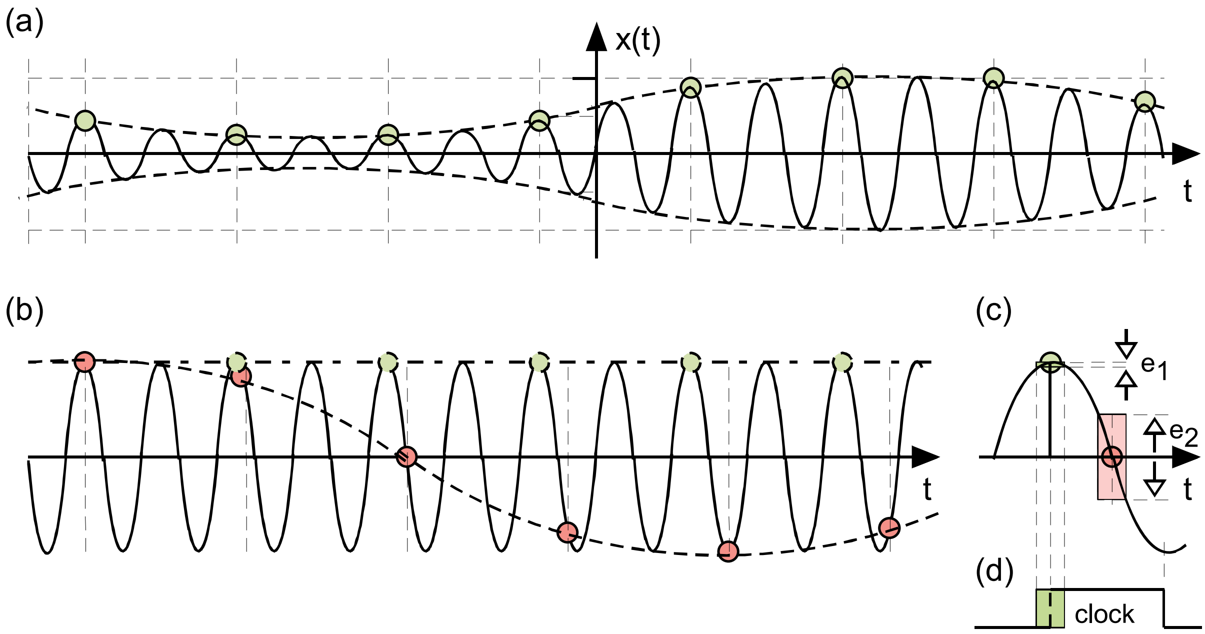


Bild 4.6: **(a)** Demodulation eines amplitudenmodulierten Signals mittels Unterabtastung; **(b)** Die abzutastende Trägerfrequenz ist nicht exakt ein ganzes Vielfaches der Tastfrequenz: Es ergibt sich fälschlicherweise ein Differenzsignal; **(c)** optimaler (grün) und schlechtestmöglicher (rot) Abtastzeitpunkt; **(d)** Tastsignal im Zeitbereich.

Bild 4.6 (a) illustriert, dass Aliasing auch zur Demodulation amplitudenmodulierter (AM) Signale eingesetzt werden kann.

Bildteil (b) veranschaulicht, dass bei dieser Demodulation von AM-Signalen der Abtastzeitpunkt immer in der gleichen Phasenlage des Trägersignals erfolgen muss, um dessen Spitzen zu treffen. Sonst erhält man statt des besten (grünen) Abtastzeitpunktes den schlechtesten (rot). Wenn das Frequenzverhältnis $f_{carrier}/f_S$ nicht exakt ganzzahlig ist, ergeben sich zusätzlich Differenzschwingungen.

Bildteil (c) illustriert, dass die optimale Phasenlage für die Abtastung das Maximum (oder Minimum) der Trägerwelle ist. Das liefert einen maximalen Abtestwert a_1 bei minimalem Fehler e_1 und somit minimalem e_1/a_1, wobei e_1 aufgrund von Phasenrauschen des Tastsignals entsteht. Der Fehler e_2 entsteht bei gleichem Phasenrauschen nahe dem Nulldurchgang a_2=0 der Trägerschwingung und ist wegen deren großer Steigung dort maximal, somit $e_2/a_2\to\infty$.

Bildteil (d) zeigt die positive Flanke des Tastsignals und deutet dessen Phasenrauschen an.

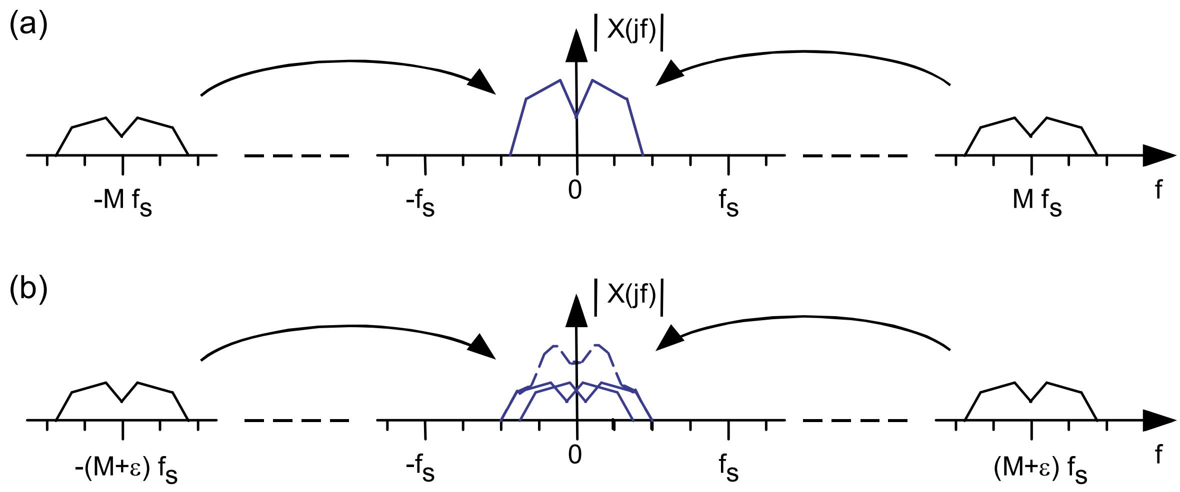


Bild 4.6-2: Demodulation eines bandbegrenzten amplitudenmodulierten (AM) Spektrums durch Unterabtastung. **(a)** Die Trägerfrequenz $M \cdot f_s$ des AM-Signals ist exakt ein ganzes Vielfaches der Sampling-Frequenz f_s. **(b)** Die Trägerfrequenz $(M+\varepsilon) \cdot f_s$ mit $0<\varepsilon<1$ des AM-Signals ist kein ganzes Vielfaches der Sampling-Frequenz f_s.

Oben ein Vorgriff auf Bild 8.6.1.1 zur Beranschaulichung der Situation im Frequenzbereich.

Merke: Subsampling nutzt Aliasing. Es kommt typischerweise mit einer PLL, um Tastung in exakter Phasenlage und Freqeunz zu garantieren. (PLL = Phase Locked Loop oder phasengerastete Schleife.)

4.7 Räumliches Aliasing (Spatial Aliasing)

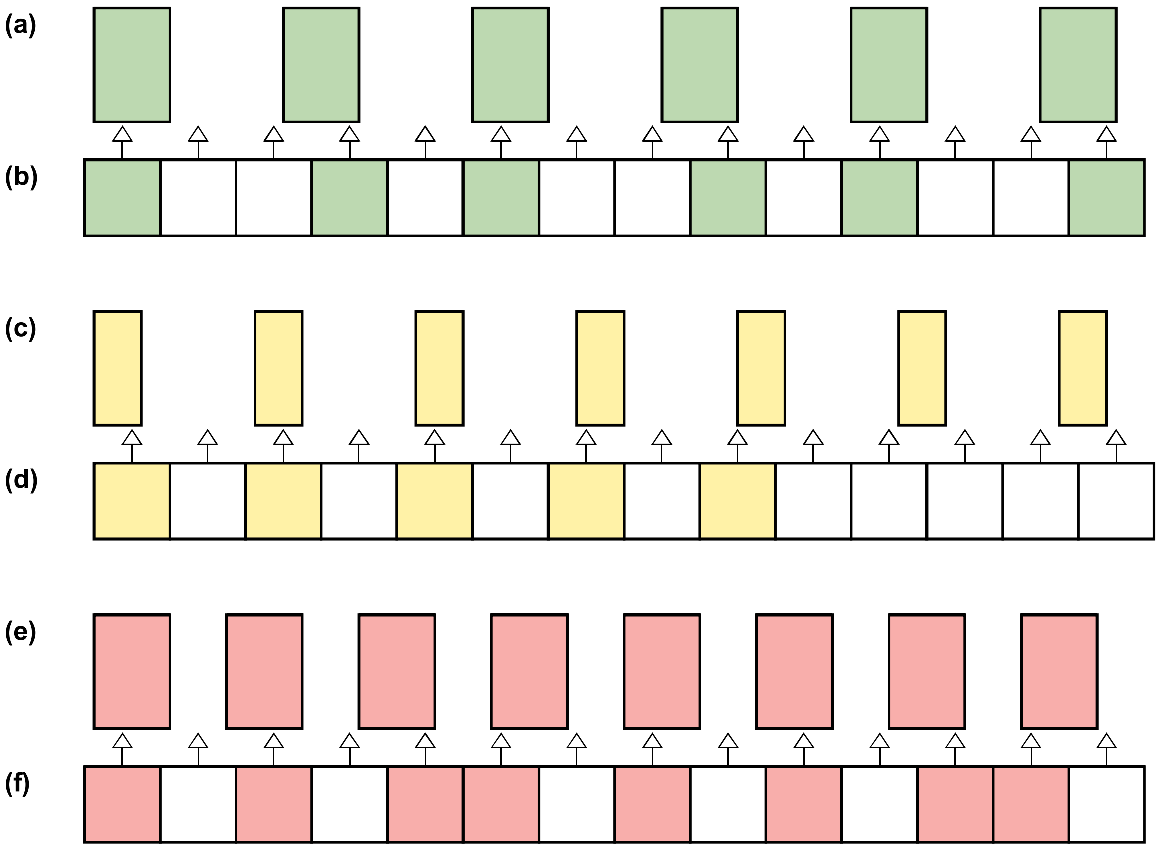


Bild 4.7: Alle Strukturelemente in Bildteil **(a)** können in Bildteil **(b)** aufgelöst werden.
Bildteil **(c)** hat eine Grundfrequenz, die aufgelöst werden könnte, aber in (d) nicht wird.
Bildteil **(e)** hat eine nicht mehr auflösbare, räumliche Frequenz → **(f)** ist grob fehlerhaft.

Aliasing gibt es nicht nur auf der Zeitachse. Die Graphik oben demonstriert räumliches Aliasing (engl.: spatial aliasing).

Bildteil (a) zeigt regelmäßiges Muster von Quadraten. **Bildteil (b)** die Pixel, mit denen es abgebildet werden soll. Ob ein Pixel weiß oder grün wird entscheidet der Pfeil am oberen Ende des Pixels. Alles Quadrate können wiedergegeben werden.

Bildteil (c) zeigt ein Muster von gleben Quadraten, die nach Nyqusit eigentlich dargestellt werden können sollten. Dennoch fehlen einige Quadrate in **Bildteil (d)**.

Bildteil (e) enthält rote Quadrate, die auf jeden Fall von einem Pixel getroffen werden müssen. Allerdigs wird das 3. und 4. Quadrat in **Bildteil (f)** als Doppelpixel dargestellt..

5 Lösungen zu den Aufgaben dieses Kapitels

Übung 1.3-1: Bis $f=\frac{1}{2}f_S$ bzw. $F=\frac{1}{2}$.

Übung 1.3-2: (a) $F=\frac{1}{4}$, $\Omega=\pi/2$, (b) $F=\frac{1}{2}$, $\Omega=\pi$, (c) $F=1$, $\Omega=2\pi$. Die Graphiken sind identisch zu Bild 2.1-1.

Übung 1.3-3: Lösungen: (a) $F=\frac{1}{2}$, $\Omega=\pi$, (b) $F=\frac{1}{2}$, $\Omega=\pi$, (c) $F=4/9=0{,}444$, $\Omega=0{,}889\pi$ (ganze Wellen zählen!). Die Graphiken sind identisch zu Bild 2.1-3.

Übung 2.1: Die obere Grenzfrequenz des Basisbandes ist $f_B = \frac{1}{2}f_S = 5$ KHz. Die 3 KHz werden korrekt mit 3 KHz wiedergegeben. Das Signal mit 6 KHz wird mit 10 KHz - 6 KHz = 4 KHz wiedergegeben, das eine KHz oberhalb von f_B erscheint also um f_B gespiegelt. Das Signal bei 12 KHz wird bei 10 KHz - 12 KHz = -2 KHz wiedergegeben. Da sich das Ganze spiegelbildlich auch auf der negativen Frequenzachse abspielt, erhalten wir die zugehörigen +2 KHz vom negativen Achsabschnitt. Das 24 KHz Signal letztlich hören wir bei 2·10 KHz - 24 KHz = -4 KHz, also bei 4 KHz.

6 Referenzen

[1] W. Kellermann, Vorlesung „Digitale Nachrichtensysteme“, FH Regensburg, 1998
[2] U.Tietze, Ch. Schenk, Halbleiterschaltungstechnik, Kap. 24: Digitale Filter, 10. Auflage, Springer Verlag