

1 Transfer-Funktion in der Laplace-Ebene

($\Sigma=30P$)

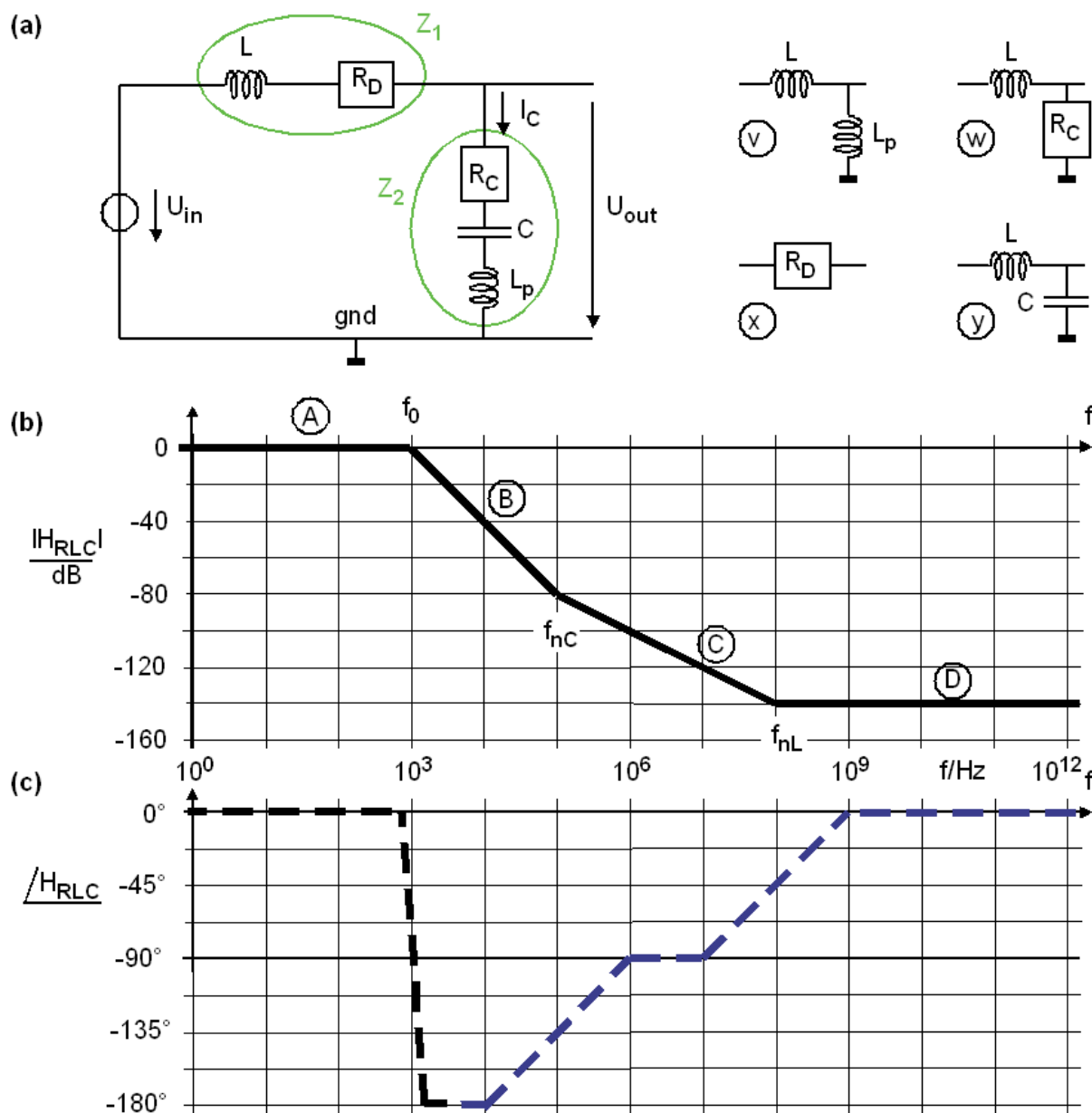


Fig. 1: (a) RLC-Tiefpass mit $L = 32 \mu\text{H}$, $R_D = 30 \text{ m}\Omega$, $C = 800 \mu\text{F}$, $R_C = 2 \text{ m}\Omega$, $L_p = 3,2 \text{ pH}$
 (b) Asymptoten des Amplituden- und (c) des Phasendiagramms. (v,w,x,y) Dominanzen..

Fig. 1 (a) zeigt einen RLC-Tiefpass mit der Übertragungsfunktion $H_{RLC} = U_{out}(s)/U_{in}(s)$. Woraus können wir in Bildteil (c) schließen, dass es in f_0 ein erhebliches Peaking (d.h. Resonanz, Überhöhung des Verlaufs über die Asymptoten) geben muss?

(1P)

ungewöhnlich steiler Abfall der Phase um -180°

.....

Komplettieren Sie in Fig. 1 (c) die Asymptoten des Phasendiagramms von $H_{RLC}(s)$.

(2P)

Schreiben Sie in Tabelle 1 unter den Kennbuchstaben des Asymptotenabschnitts (A, B, C, D) die Buchstaben des Bildteils (v, w, x, y), welches die zugehörige Asymptote erzeugt. (4)

Tabelle 1:

Asymptoten- abschnitt		Asymptoten- abschnitt		Asymptoten- abschnitt		Asymptoten- abschnitt
A		B		C		D
x		y		w		v

Abschätzung der Eckfrequenzen:

Wir schätzen die doppelte Polstelle f_0 und die Nullstellen f_{nC} und f_{nL} ab. (Genaue Berechnung mit Übertragungsfunktion erst auf nächster Seite!) Werte sind auf mindestens 3 Dezimalstellen genau anzugeben. Hinweis: Die Werte passen näherungsweise zu Bild 1(a).

Welche zwei Impedanzen sind in f_0 betragsmäßig ungefähr gleich groß? (Formel) (1P)

$$\omega_0 \cdot L \cong 1 / (\omega_0 \cdot C)$$

.....

Welches abgeschätzte f_0 ergibt sich daraus? (Formel und Wert) (2P)

$$f_0 \cong f_0 \cdot \cong 1 / (2\pi \sqrt{L \cdot C}) = 994,7 \text{ Hz}$$

.....

Welche zwei Impedanzen sind in f_{nC} betragsmäßig ungefähr gleich groß? (Formel) (1P)

$$R_C \cong 1 / (\omega_{nC} \cdot C)$$

.....

Welches abgeschätzte f_{nC} ergibt sich daraus? (Formel und Wert) (2P)

$$f_{nC} \cong 1 / (2\pi \cdot R_C \cdot C) = 99,47 \text{ KHz}$$

.....

Welche zwei Impedanzen sind in f_{nL} betragsmäßig ungefähr gleich groß? (Formel) (1P)

$$R_C \cong \omega_{nL} \cdot L_P$$

.....

Welches abgeschätzte f_{nL} ergibt sich daraus? (Formel und Wert) (2P)

$$f_{nL} \cong R_C / (2\pi \cdot L_P) = 99,47 \text{ MHz}$$

.....

Genaue Berechnung der Übertragungsfunktion:Berechnen Sie $Z_1(s)$ gemäß der grünen Kennzeichnung in Bildteil (a) mit *Laplace*-Variable s .

(1P)

$$Z_1(s) = R_D + sL$$

.....

Berechnen Sie $Z_2(s)$ gemäß der grünen Kennzeichnung in Bildteil (a) mit *Laplace*-Variable s .

(1P)

$$Z_2(s) = R_C + 1/(sC) + sL_p$$

.....

Wie berechnet sich die Übertragungsfunktion $H_{RLC}(s) = U_{out}(s) / U_{in}(s)$ des Tiefpasses **als Funktion von $Z_1(s)$ und $Z_2(s)$** ? (Berechnung als Funktion von $R_\#, L_\#, C$ weiter unten!)

(1P)

$$H_{RLC}(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

.....

Wie berechnet sich die Übertragungsfunktion $H_{RLC}(s) = U_{out}(s) / U_{in}(s)$ des Tiefpasses **als Funktion von R_C, R_D, L, C, L_p und *Laplace*-Variable s** ? Gefragt ist eine Doppelbruchfreie Formel, in der in Zähler und Nenner jeweils nur einmal s und s^2 vorkommen.

(3P)

$$H_{RLC}(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{1/(sC) + R_C + sL_p}{R_D + sL + 1/(sC) + R_C + sL_p} = \frac{1 + R_C \cdot Cs + L_p C \cdot s^2}{1 + (R_C + R_D)Cs + (L + L_p)Cs^2}$$

.....

.....

.....

.....

Wir stellen die Übertragungsfunktion dar als $H_{RLC}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2}{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2}$. Dann ergeben sich die Koeffizienten für $b_0 = 1$ als Funktionen von R_C, R_D, L, C und L_p zu:

(2P)

$$a_0 = 1 \quad a_1 = R_C C \quad a_2 = L_p \cdot C$$

.....

$$b_0 = 1 \quad b_1 = (R_C + R_D) C \quad b_2 = (L + L_p) C$$

.....

$$H_{RLC}(s) \text{ hat die Nullstellen } s_{n1,2} = \frac{-a_1}{2a_2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a_0a_2}{a_1^2}} \right) = -3,125 \cdot 10^8 (1 \pm 0,998) \text{ s}^{-1}.$$

Berechnen Sie die Nullstellenfrequenzen f_{n1} und f_{n2} und identifizieren Sie, welche Eckfrequenz in Fig. 1(a) damit exakt berechnet wurde. (3P)

$$s_{n1} = -6,26 \cdot 10^5 \cdot \text{s}^{-1} \quad (1P)$$

$$f_{n1} = s_{n1}/2\pi = 99,57 \text{ KHz} \quad (\cong f_{nC}) \quad (1P)$$

$$\text{Identifikation: } f_{n1} = f_{nC} \quad (1P)$$

$$s_{n2} = -6,24 \cdot 10^8 \cdot \text{s}^{-1} \quad (1P)$$

$$f_{n2} = -s_{n2}/2\pi = 99,37 \text{ MHz} \quad (1P)$$

$$\text{Identifikation: } f_{n2} = f_{nL} \quad (1P)$$

$$H_{RLC}(s) \text{ hat die Polstellen } s_{p1,2} = \frac{-b_1}{2b_2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b_0b_2}{b_1^2}} \right) = -500 (1 \pm j \cdot 12,46) \text{ s}^{-1}.$$

Berechnen Sie die Polfrequenzen $f_{p1,2}$ und benennen Sie, welche Eckfrequenz in Fig. 1(a) damit exakt berechnet wurde. (3P)

$$s_{p1,2} = (500 \pm j \cdot 6230) \cdot \text{s}^{-1} \quad (1P)$$

$$f_{p1,2} = |s_{p1,2}| / 2\pi = 994,7 \text{ Hz} \quad (1P)$$

$$\text{Id.: } f_{p1,2} = f_0 \quad (1P) \quad (\text{Einfluss von } L_p \text{ hier verschwindend gering})$$

Zur Vorbereitung für den Prüfer:

Berechnung der Bauelemente-Parameter bei gegebenen Eckfrequenzen, D und R_C .

$$-s_{n\#} = \omega_{n\#} = 2\pi \cdot f_{n\#}, \quad T_{n\#} = \frac{1}{\omega_{n\#}}, \quad \# = L, C, \quad |s_{p1,2}| = \omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = \frac{1}{\sqrt{(L + L_p)C}}$$

$$H_{RLC}(s) = \frac{(1 + s \cdot T_{nC})(1 + s \cdot T_{nL})}{(s^2 + 2D\omega_0 \cdot s + \omega_0^2) / \omega_0^2} = \frac{1 + (T_{nC} + T_{nL}) \cdot s + T_{nC}T_{nL} \cdot s^2}{1 + \frac{2D}{\omega_0} \cdot s + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1 + R_C C \cdot s + L_p C \cdot s^2}{1 + (R_C + R_D)C \cdot s + (L + L_p)s^2}$$

$$\text{Aus Zähler: } R_C \cdot C = T_{nC} + T_{nL}, \quad \rightarrow R_C \text{ gegeben} \rightarrow C = \frac{T_{nC} + T_{nL}}{R_C}$$

$$L_p \cdot C = T_{nC} \cdot T_{nL} \quad \rightarrow L_p = \frac{T_{nC} \cdot T_{nL}}{C}$$

$$\frac{2D}{\omega_0} = (R_C + R_D)C \quad \rightarrow D \text{ gegeben} \rightarrow R_D = \frac{2D}{C \cdot \omega_0} - R_C$$