

1 Grundlagen: LTI-Modelle in s (Σ=34P)

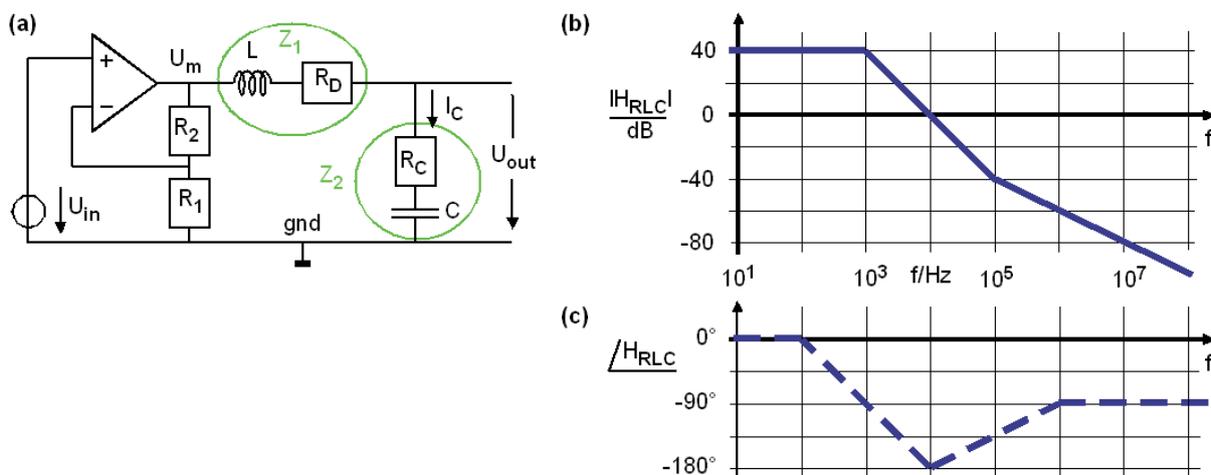


Bild 1: (a) OpAmp mit RLC-Tiefpass, (b) Amplitudendiagramm, (c) Phasendiagramm

Bild 1 (a) zeigt eine Verstärkerstufe aufgebaut mit einem idealen Operationsverstärker und nachgeschaltetem RLC-Tiefpass mit der Übertragungsfunktion $H_{RLC}(s) = U_{out}(s)/U_m(s)$; dabei ist s die Laplace-Variable.

Die Gesamtschaltung habe eine DC-Verstärkung von $A_0 = 40\text{dB}$, eine doppelte Polstelle in $f_{p1,2} = 1\text{ kHz}$ (d.h. $|s_{p1}| = |s_{p2}| = 2\pi \cdot 1000\text{ rad/s}$) und eine Nullstelle in $f_{n1} = 100\text{ f}_p$.

(a) Es sei $R_1 = 1\text{ k}\Omega$. Wie groß ist R_2 ? (2P)

$A_0 = (R_1 + R_2) / R_1 = A_0 = 100$ entsprechend 40dB

Da $A_0 = 100 \Rightarrow R_2 = 99\text{ k}\Omega$

Skizzieren Sie in Bild 1...

(b) ... die Asymptotennäherung des Amplitudengangs $|H(f)|$ in Bildteil (b) und (3P)

(c) ... die Asymptotennäherung des Phasengangs von $H(f)$ in Bildteil (c). (4P)

(d) Stellen Sie die Formel auf für $Z_1(s)$ gemäß der grünen Kennzeichnung in Bild 1 (a). (1P)

$Z_1(s) = R_D + sL$

.....

(e) Stellen Sie die Formel auf für $Z_2(s)$ gemäß der grünen Kennzeichnung in Bild 1 (a). (1P)

$Z_2(s) = R_C + 1/(sC)$

.....

- (f) Wie berechnet sich die Übertragungsfunktion $H_{RLC}(s) = U_{out}(s) / U_m(s)$ des Tiefpasses als Funktion von $Z_1(s)$ und $Z_2(s)$? (1P)

$$H_{RLC}(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- (g) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $H_{RLC}(s) = U_{out}(s) / U_m(s)$ des RLC-Tiefpasses als Funktion von R_C , R_D , L , C und der Laplace-Variablen s . Gefragt ist eine Doppelbruch-freie Formel. (Darin kommt eine Klammerung vor.) (2P)

$$H_{RLC}(s) = \frac{U_m(s)}{U_{in}(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1/(sC) + R_C}{1/(sC) + R_C + R_D + sL} = \frac{1 + sR_C C}{1 + (R_C + R_D)C \cdot s + LC \cdot s^2}$$

- (h) Wir setzen in der Laplace Darstellung $s=j\omega$. Worin liegt der Vorteil, Übertragungsfunktionen als $H(s)$ zu beschreiben und nicht als $H(j\omega)$, obwohl die Substitution $s = j\omega$ nur eine kleine Änderung ist? (1P)

Um die wichtigen Pole, $s_{p\#}$, und Nullstellen, $s_{n\#}$, von $H(s)$ als komplexe Zahlen und mit Real- und Imaginärteil auszurechnen.

- (i) Welche Bedingungen müssen bei der Messung eingehalten werden, um die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ messtechnisch zu verifizieren? (2P)

Eingeschwungener Zustand bei rein sinusförmiger Anregung $\omega=2\pi f$ und sinusförmigem Ausgangssignal

- (j) Welche Übertragungsfunktion beschreibt das Gesamtsystem $H(s) = U_{out}(s) / U_{in}(s)$ als Funktion von A_0 , R_C , R_D , L , C ? (1P)

$$H(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = A_0 \cdot H_{RLC}(s) = A_0 \frac{1 + sR_C C}{1 + (R_C + R_D)C \cdot s + LC \cdot s^2}$$

Die Gesamtübertragungsfunktion $H(s)$ lasse sich darstellen als

$$H(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = A_0 \frac{1 + s/\omega_n}{1 + s/\omega_0 + s^2/\omega_0^2} = K \cdot \frac{s - s_n}{(s - s_{p1})(s - s_{p2})}$$

- (k) Herzuleiten als Formeln und Werte sind: K (2P), s_n (1P), s_{p1} und s_{p2} (2P) (5P)

K: Ansatz: $H_{RLC}(s) = A_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_n} \cdot \frac{\omega_n + s}{\omega_0^2 + \omega_0 \cdot s + s^2} = K \cdot \frac{\omega_n + s}{\omega_0^2 + \omega_0 \cdot s + s^2}$, daher:

$$K = A_0 (\omega_0)^2 / \omega_n = A_0 (\omega_0)^2 / (100 \cdot \omega_0) = \omega_0 = 2\pi \cdot 1000 \text{ s}^{-1} = 6283 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Nullstelle } s_n = -\omega_n = -100 \cdot \omega_0 = -100 \cdot 2\pi \cdot 1000 \text{ Hz} = 628 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\text{Polstellen: } s_p + \omega_0 \cdot s_p + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow s_{p1,2} = -(\omega_0/2) (1 \pm j\sqrt{3})$$

- (l) Das Eingangssignal sei $U_{in}(t) = 10 \text{ mV}$ für $t < 0$ und 0V für $t \geq 0$. Wie verhält sich $U_{out}(t)$? (4P)

Für $t < 0$: $U_{out}(t) = 1 \text{V}$, weil DC-Verstärkung 100

**Für $t \geq 0$: $U_{out}(t) = K_1 \cdot \exp(s_{p1} \cdot t) + K_2 \cdot \exp(s_{p2} \cdot t)$,
 **K_1, K_2 so wählen, dass Randbedingungen $U_{out}(0)$ und $U'_{out}(0)$
 stetig sind: $U_{out}(0) = 1 \text{V}$, und: $U'_{out}(0) = 0 \text{ V/s} \rightarrow \varphi_0=0$:****

$$U_{out}(t) = 1 \text{V} \cdot \exp(-\omega_0/2) \cos(\omega_0 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot t + \varphi_0) = 1 \text{V} \cdot \exp(-6283 \cdot t/\text{s}) \cdot \cos(866 \cdot t/\text{s})$$

- (m) Berechnen Ihre persönliche Frequenz $f_{MNR} = (1000 + MNR)$ Hz, wobei MNR die letzten 3 Ziffern Ihrer Matrikelnummer sind. (1P)

Annahme: $MNR = 234 \rightarrow f_{MNR} = 1234 \text{ Hz}$

- (n) Berechnen Sie die Werte für Amplitude und Phase von $H_{RLC}(s)$ in der Frequenz f_{MNR} . (2P)

$$H_{RLC}(s = j2\pi f_{MNR}) = A_0 \frac{1 + s/\omega_n}{1 + s/\omega_0 + s^2/\omega_0^2} \Big|_{s=j \cdot f_{MNR}} = 100 \cdot \frac{1 + j \cdot f_{MNR}/f_n}{(1 - (f_{MNR}/f_0)^2) + j \cdot f_{MNR}/f_0}$$

Betrag: 0,7462

Phase: $\phi_{mnr} = -1,9592 \text{ rad/s} = -112,25^\circ$

- (o) Das Gesamtsystem wird mit einem sinusförmigen Signal mit Amplitude von 10 mV auf der Frequenz f_{MNR} angeregt. Welche Amplitude und welche Verzögerung beobachten wir im Zeitbereich? (2P)

$$\hat{U}_{out} = 0,7462 \text{V}$$

$$T_{del} = \phi_{mnr} / (2\pi \cdot f_{MNR}) = 252,68 \mu\text{s}$$

- (p) Gegeben sei $C = (400 + MNR) \mu\text{F}$. (C liegt also im Wertebereich $400 \dots 500 \mu\text{F}$.) Ermitteln Sie C, L, R_C und R_D als Formeln und Werte. (4P)

$$f_n = 100 \cdot f_0 = 100 \text{ kHz}; \quad \omega_n = 2\pi \cdot 100 \text{ kHz} = 628,3 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

$$MNR = 234: \quad C = (200 + MNR) \mu\text{F} = (200 + 234) \mu\text{F} = 434 \mu\text{F} \quad (1P)$$

$$R_C = 1 / (\omega_n \cdot C) = 3,667 \text{ m}\Omega \quad (1P)$$

$$L = 1 / ((\omega_0)^2 \cdot C) = 58,365 \mu\text{H}, \quad \text{aus } (\omega_0)^2 = 1/(LC) \quad (1P)$$

$$R_D = 1/(\omega_0 \cdot C) - R_C = 363,0 \text{ m}\Omega, \quad \text{aus } (R_C + R_D)C = 1/\omega_0 \quad (1P)$$

2 Schaltkreisanalyse-Methoden

($\Sigma=20P$)

Bild 2: Schaltung mit Bipolartransistor. Ziffern in Kreisen sind Knotenlabel.

Early-Spannung: $V_A = 100V$
Stromverstärkung $\beta_0 = 120$

Zur Berechnung sind gemäß Vorlesung folgende Modellgleichungen zu verwenden:

$$I_{C0} = I_S \cdot e^{\frac{U_{BE}}{u_T}}, \quad u_T = kT/q,$$

$$I_C = I_{C0}(1 + U_{CE}/V_A),$$

$$\beta = I_C / I_B = \beta_0(1 + U_{CE}/V_A)$$

$$g_m = I_C / u_T, \quad r_m = 1/g_m$$

$$r_{BE} = \beta \cdot r_m, \quad r_{CE} = 1/g_{CE}$$

$$g_{CE} = I_C / (V_A + U_{CE}).$$

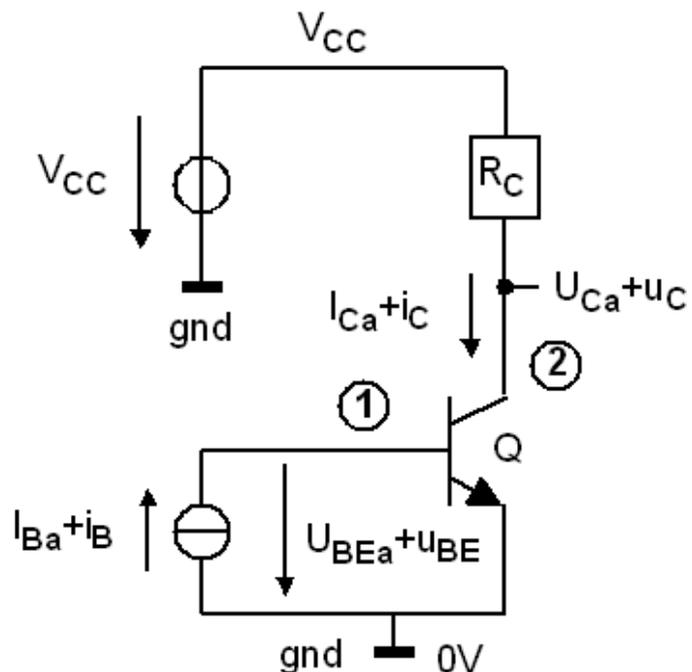


Bild 3 zeigt eine Verstärkerschaltung mit Bipolar-Transistor. Sei $u_T = 25 \text{ mV}$, $V_{CC} = 20V$ und der Arbeitspunkt des Kollektors bei $U_{Ca} = 10V$.

- (a) In welcher Schaltungsart (z.B. Source-, Drain-, Basis-... Schaltung) wird dieser Transistor betrieben? (1P)

Emitterschaltung

Berechnung des Arbeitspunktes

- (b) Welche Spice-Direktive gibt den berechneten Arbeitspunktes aus? (1P)

.OP

- (c) Der Kollektorstrom im Arbeitspunkt betrage $I_{Ca} = 1, MNR \text{ mA}$, wobei MNR die letzten die 3 Ziffern Ihrer Matrikelnummer sind. Berechnen Sie Widerstand R_C sowie I_{Ca} , β_a , I_{Ba} , wobei Index a „im Arbeitspunkt“ bedeutet. (Gefragt sind jeweils Formel und Wert.) (4P)

$$MNR = 0000: I_{Ca} = (1+0,000) \text{ mA} = 1 \text{ mA} \quad (1P)$$

$$MNR = 1000: I_{Ca} = (1+1,00) \text{ mA} = 2 \text{ mA}$$

$$R_C = (V_{CC} - U_{CEa}) / I_{Ca} = 10V / 1 \text{ mA} = 10 \text{ k}\Omega \quad (1P)$$

$$R_C = (V_{CC} - U_{CEa}) / I_{Ca} = 10V / 2 \text{ mA} = 5 \text{ k}\Omega$$

$$\beta_a = \beta_0 \cdot (1 + U_{CEa}/V_A) = 120 \cdot (1 + 10/100) = 132 \quad (2P)$$

$$I_{Ba} = I_{Ca} / \beta_a = 1 \text{ mA} / 132 = 7,576 \text{ }\mu\text{A} \quad (1P)$$

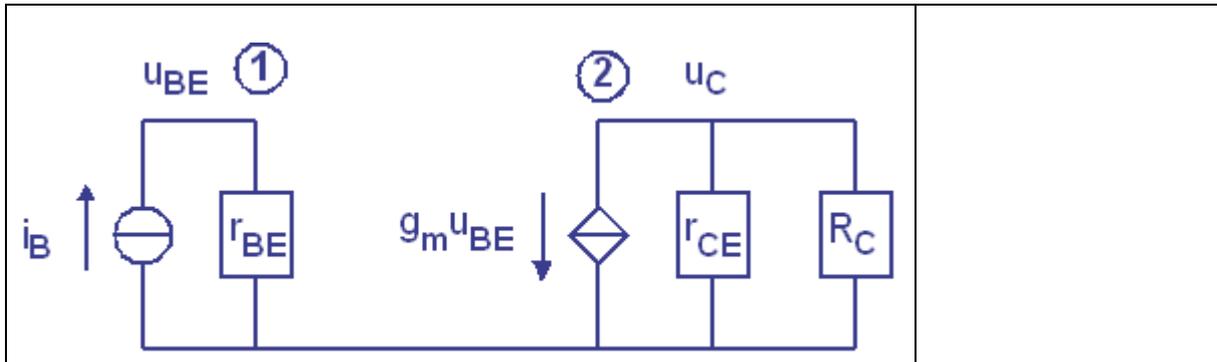
$$I_{Ba} = I_{Ca} / \beta_a = 2 \text{ mA} / 132 = 15,15 \text{ }\mu\text{A}$$

Berechnung des DC-Kleinsignal-Ersatzschaltbildes (ESBs)

- (d) Welche *Spice*-Direktive fordert die Berechnung des DC-Kleinsignal-ESBs und deren Ausgabe an? (1P)

.TF

- (e) Skizzieren Sie das DC-Kleinsignal-ESB der Schaltung in Bild 2. (5P)



- (f) Sei $\beta_a = 132$. Berechnen Sie die Kleinsignalgrößen g_m , r_{BEa} , r_{CEa} , Z_{2a} (=Impedanz des Knotens mit Label 2) als g_m , r_{BE} , r_{CE} , Z_2 im Arbeitspunkt, sowie die Kleinsignalverstärkung A_{Va} als $A_V = u_C/u_{BE}$ im Arbeitspunkt. Gefragt sind Formeln und Werte. (6P)

$$g_m = I_{Ca}/u_T = 1\text{mA}/25\text{mV} = 40\text{mS} \quad (1\text{P})$$

$$g_m = I_{Ca}/u_T = 2\text{mA}/25\text{mV} = 80\text{mS}$$

$$r_{BE} = \beta_a \cdot r_m = \beta_a/g_m = 132/0,04\text{S} = 3,3\text{K}\Omega \quad (1\text{P})$$

$$r_{BE} = \beta_a \cdot r_m = \beta_a/g_m = 132/0,08\text{S} = 1,65\text{K}\Omega$$

$$g_{CE} = I_{Ca} / (V_A + U_{CEa}) = 1\text{mA} / (100\text{V} + 10\text{V}) \quad (1\text{P})$$

$$r_{CE} = 1/g_{CE} = (100\text{V} + 10\text{V}) / 1\text{mA} = 110\text{K}\Omega \quad (1\text{P})$$

$$r_{CE} = 1/g_{CE} = (100\text{V} + 10\text{V}) / 2\text{mA} = 55\text{K}\Omega$$

$$Z_2 = R_C \parallel r_{CE} = 9167\Omega; \quad (1\text{P})$$

$$Z_2 = R_C \parallel r_{CE} = 4583\Omega;$$

$$-A_V = g_m \cdot R_2 = 40\text{mS} \cdot 9167\Omega = 367 \quad (1\text{P})$$

$$-A_V = g_m \cdot R_2 = 80\text{mS} \cdot 4583\Omega = 367$$

- (g) Welche *Spice*-Direktive fordert eine Simulation mit dem AC-Kleinsignal-ESB über der Frequenzachse an? Es genügt die Benennung der Direktive, ohne Zusatzparameter. (1P)

.AC

3 Berechnung von Polen mit Miller-Effekt $(\Sigma=20P)$

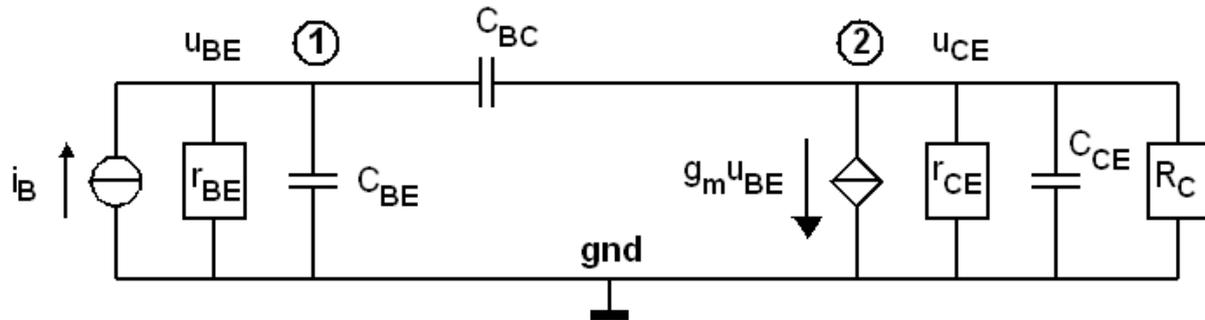
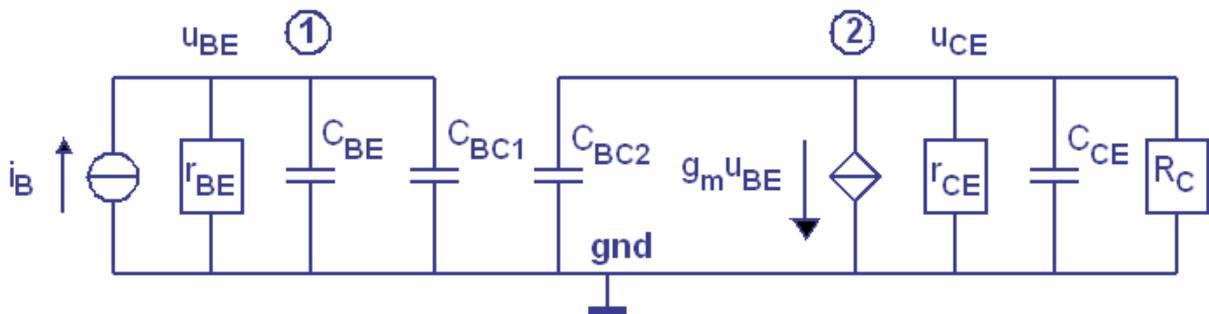


Bild 3: Kleinsignal-(Ersatz-)Schaltbild. Ziffern in Kreisen sind Knotenlabels.

Sei $R_C=10\text{K}\Omega$; $r_{BE}=3,5\text{K}\Omega$, $r_{CE}=100\text{K}\Omega$, $A_V = -340$, Basis-Emitter-Kapazität $C_{BE} = 35,5 \text{ pF}$, Basis-Kollektor-Kapazität $C_{BC} = 8,5 \text{ pF}$, Basis-Emitter-Kapazität: $C_{CE} = 3,5\text{pF}$.

Gefragt sind jeweils Formel und Wert.

- (a) Zeichnen Sie die Schaltung in Bild 2 so um, dass die Pole der Spannungen u_{BE} und u_C unabhängig voneinander berechnet werden können. (6P)



- (b) Berechnen Sie die Kapazität C_1 als die gesamte parallel zu r_{BE} gemessene Kapazität. (4P)

$$C_{BC1} = C_{BC} \cdot (1 - A_V) = 8,5 \text{ pF} \cdot (1 + 340) = 2,90 \text{ nF} \quad (2P)$$

$$C_1 = C_{BE} + C_{BC1} = 35,5 \text{ pF} + 2900 \text{ pF} \Rightarrow 2,94 \text{ nF} \quad (2P)$$

- (c) Berechnen Sie den Pol f_{p1} des Knotens (1), also der Spannung u_{BE} . (2P)

$$f_{p1} = 1 / (2\pi \cdot r_{BE} \cdot C_1) = 1 / (2\pi \cdot 3,5 \text{ K}\Omega \cdot 2,9 \text{ nF}) = 15,5 \text{ KHz} \quad (2P)$$

- (d) Berechnen Sie die Kapazität C_2 als die gesamte parallel zu r_{CE} gemessene Kapazität. (4P)

$$C_{BC2} = C_{BC} \cdot (1 - 1/A_V) = 8,5 \text{ pF} \cdot (1 + 1/340) = 8,525 \text{ pF} \quad (2P)$$

$$C_2 = C_{CE} + C_{BC2} = 3,5 \text{ pF} + 8,525 \text{ pF} = 12,025 \text{ pF} \Rightarrow 12\text{pF} \quad (2P)$$

- (e) Berechnen Sie den Pol f_{p2} des Knotens (2), also der Spannung u_{CE} . (4P)

$$R_2 = r_{CE} \parallel R_C = 9,10 \text{ K}\Omega \quad (2P)$$

$$f_{p2} = 1 / (2\pi \cdot R_2 \cdot C_2) = 1 / (2\pi \cdot 9,1\text{K}\Omega \cdot 12\text{pF}) = 1,46 \text{ MHz} \quad (2P)$$

4 Messung der Änderung eines Widerstands R_4 ($\Sigma=16P$)

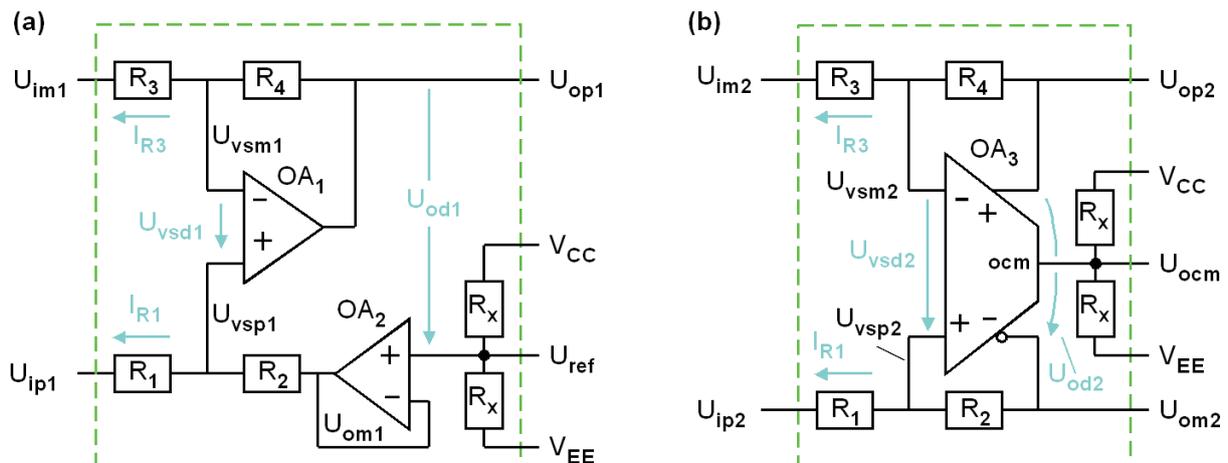


Bild 4: Verstärker mit (a) Single-Ended und (b) vollständig differentiellen OpAmp (OA),
Index-Nomenklatur: $i##$ und $o##$: Ein- und Ausgänge der Schaltung,
 $vs##$ (virtual short): direkte Eingangsspannungen der OpAmps;
 $#m##$ und $#p##$: invertierend und nicht-invertierend; 1 und 2: Bildteile (a) und (b).

Alle Operationsverstärker $OA_{\#}$, $\#=1,2,3$, werden mit der positiven und negativen Versorgungsspannung V_{CC} und V_{EE} versorgt und als ideal angenommen. Das heißt: Für alle Frequenzen gilt Eingangsimpedanzen $Z_{in} \rightarrow \infty$ und Spannungsverstärkung $A_V \rightarrow \infty$, Ausgangsimpedanzen $Z_{out} = 0$ sowie Rail-to-Rail Output Swing: $V_{EE} \leq U_{o##} \leq V_{CC}$.

- (a) Warum dürfen wir annehmen $U_{vsd1} = U_{vsd2} = 0$? (1P)

Virtueller Kurzschluss: Weil $A_{V\#} \rightarrow \infty$: Jede endliche Spannung $U_{id\#}$ würde unendlich hohe Ausgangsspannung $U_{od\#}$ bewirken.

- (b) Welche Beziehung besteht zwischen den Spannungen U_{om1} und U_{ref} in Bildteil (a)? (1P)

Sind identisch: $U_{om1} = U_{ref}$

Wir legen alle 4 Eingangsspannungen auf Masse: $U_{im1} = U_{ip1} = U_{im2} = U_{ip2} = 0V$.

- (c) Bildteil (a): Gegeben sei U_{ref} . Welche Spannungen U_{vsp1} und U_{vsm1} stellen sich ein als Funktion U_{ref} , R_1 , R_2 ? (2P)

$$U_{vsp1} = U_{om1} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U_{ref} \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_{vsm1} = U_{vsp1}.$$

- (d) Bildteil (a): Sei $R_3 = R_1$. Welcher Strom I_{R3} fließt durch die Widerstände R_3 und R_4 als Funktion von U_{ref} , R_1 , R_2 ? (2P)

$$I_{R1} = U_{ref} / (R_1 + R_2)$$

$$I_{R3} = I_{R4}, \text{ weil: } R_3 = R_1 \text{ und } U_{vsp1} = U_{vsp2} \text{ ist } I_{R3} = I_{R1} = U_{ref} / (R_1 + R_2)$$

- (e) Bildteil (b): Bekannt sei U_{om2} . Welche Spannungen U_{vsp2} und U_{vsm2} stellen sich ein als Funktion U_{om2}, R_1, R_2 ? (2P)

$$U_{vsm2} = U_{vsp2} = U_{om2} \cdot R_1 / (R_1 + R_2)$$

- (f) Bildteil (b): Sei $R_3 = R_1$. Welcher Strom I_{R3} fließt durch die Widerstände R_3, R_4 als Funktion von U_{om2}, R_1, R_2 ? (2P)

gleiche Argumentation wie unter d): $I_{R1} = U_{om2} / (R_1 + R_2)$
 $I_{R3} = I_{R4}$, weil: $R_3 = R_1$ und $U_{vsp1} = U_{vsp2}$ ist $I_{R3} = I_{R1} = U_{om2} / (R_1 + R_2)$

- (g) Gilt für beide Bildteile: $R_4 = R_2 + \Delta R$ mit Messgröße ΔR . Welche Spannungsdifferenz $U_{od\#} = U_{op\#} - U_{om\#}$, $\# = 1, 2$, stellt sich ein als Funktion von $U_{om2}, \Delta R, R_1, R_2$? (3P)

Da ΔR den einzigen Unterschied zwischen den Ausgängen $U_{op\#}$ und $U_{om\#}$ ausmacht: $U_{od} = \Delta R_4 \cdot I_{R4} = \Delta R_4 \cdot I_{R3} = \Delta R_4 \cdot U_{om2} / (R_1 + R_2)$

- (h) Eingepägt werden U_{om1} für Bildteil (a) und U_{ocm} für Bildteil (b). Welcher der beiden Messverstärker liefert eine lineare Abhängigkeit $U_{od\#} = f(\Delta R)$ und welcher nicht? Begründen Sie ihre Antwort. (3P)

Der Verstärker in Bildteil (a) liefert eine lineare Abhängigkeit, weil nur er ein konstantes U_{vs1} und somit einen konstanten Messstrom durch R_3 erzwingt. Im Bildteil (b) sinkt $U_{om2} \sim 1/\Delta R_4$, um U_{ocm} konstant zu halten.

