

## 7 Rauschen

### 7.1 Rauscharten

#### 7.1.1 Thermisches Rauschen (Johnson noise)

Temperatur ist Bewegung der kleinsten Teilchen. Bei  $0\text{K} \cong -273,15^\circ\text{C}$  käme diese Bewegung vollständig zur Ruhe. Mangels eines hinreichend kalten Gefäßes ist  $0\text{K}$  nicht erreichbar. Die schwingenden Teilchen verursachen nicht nur die Brown'sche Molekularbewegung und die Wärmedehnung fester Körper, sondern auch ein Rauschen für prinzipiell jeden Widerstand. Wir berechnen im Folgenden die Rauschleistungsdichte  $P_n'(f)$  in  $\text{W/Hz}=\text{AVs}$ , mit deren

Hilfe sich die gesamte Rauschleistung zu  $P_n = \int_{f=0}^{f=\infty} P_n'(f) df$  in  $\text{W}=\text{AV}$  ergibt.

Ein Widerstand liefert die thermische Rauschleistungsdichte  $P_n'(f, T) = 4kT$ .

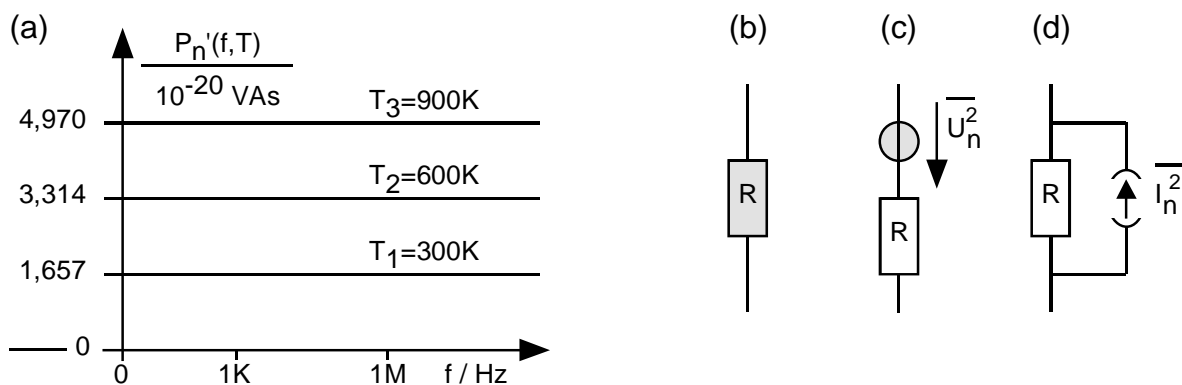
Die Boltzmann-Konstante ist gegeben mit  $k=1,380662 \cdot 10^{-23} \text{Ws/K}$ . Diese Dichte ist konstant über der Frequenzachse. Beispiele gemäß Bild 7.1(a):

$$P_n'(f, T_1 = 300\text{K}) = 4 \cdot 1,38065 \cdot 10^{-23} (\text{AVs/K}) \cdot 300\text{K} = 1,6568 \cdot 10^{-20} \text{AVs}$$

$$P_n'(f, T_2 = 600\text{K}) = 3,3136 \cdot 10^{-20} \text{AVs}$$

$$P_n'(f, T_3 = 900\text{K}) = 4,9704 \cdot 10^{-20} \text{AVs}$$

- Bild 7.1.1(b) zeigt einen rauschenden Widerstand.
- Bild 7.1.1(c) zeigt als Ersatzschaltbild einen rauschfreien Widerstand in Serie mit einer Rauschspannungsquelle. Spannungsquellen lassen sich umrechnen in Stromquellen.
- Bild 7.1.1(d) zeigt als Ersatzschaltbild einen rauschfreien Widerstand parallel mit einer Rauschstromquelle.



**Bild 7.1.1:** (a) Rauschleistungsdichte eines Widerstandes für drei Temperaturen, (b) rauschender Widerstand und Ersatzschaltbilder: (c) mit Rauschspannungsquelle, (d) mit Rauschstromquelle.

Beispiel: Welche thermische Rauschleistung  $P$  liefert ein Widerstand in dem Frequenzband von 10 KHz bis 11 KHz bei einer Temperatur von  $T_1=300K$ ?

Antwort: Die Bandbreite beträgt  $B=11KHz-10KHz=1KHz$ , und somit:

$$P_n = \int_{10KHz}^{11KHz} P_n'(f, T_1 = 300K) \cdot df = P_n' \cdot B = 4kTB = 1,657 \cdot 10^{-20} VA_s \cdot 1000Hz = 1,657 \cdot 10^{-17} VA$$

Da die Rauschleistungsdichte über der Frequenzachse konstant ist ("weißes Rauschen"), reduziert sich die Integration auf eine einfache Multiplikation.

**Merke:** Wäre  $P'$  wirklich für  $f \rightarrow \infty$  konstant, dann wäre diese Funktion unendlich breit. Unendlich ist nichts in der realen Welt, nicht einmal das Universum. Wäre die  $P|$  wirklich konstant für  $B \rightarrow \infty$ , dann wäre auch die Rauschleistung  $P_n = 4kTB$  eines Widerstandes unendlich und dieser unendlich heiss. Die Näherung  $P_n = 4kTB$  gilt aber für alle technisch relevanten Frequenzen, da die Tiefpasscharakteristik realer Systeme in der Regel sehr viel schmalbandiger ist, als die Bandbreite, für die  $B$  als konstant angenommen werden kann.

Wegen  $P_n = U_{n,th,eff}^2 / R = I_{n,th,eff}^2 R$  ist diese Leistung messbar als Rauschspannungsquelle  $U_{n,th,eff} = \sqrt{P_n \cdot R} = \sqrt{4kTBR}$  oder als Rauschstromquelle  $I_{n,th,eff} = \sqrt{P_n / R} = \sqrt{4kTB / R}$ .

Die vom Widerstand abgegebene Rauschleistung ist als Rauschspannung meßbar: Es ist  $P_n = \overline{u_{n,th}^2} / R$ , wobei gemäß Bild 4.1(c)  $\overline{u_{n,th}}$  die mittlere thermische Rauschspannung des Widerstandes  $R$  ist. Daraus ergibt sich

$$\overline{u_{n,th}^2} = P_n \cdot R = 4kTBR$$

Der Effektivwert ist die Wurzel aus dem quadratisch Mittelwert des Quadrates:

$$u_{n,th,eff} = \sqrt{\overline{u_{n,th}^2}} = \sqrt{4kTBR} \cong 129 pV \cdot \sqrt{\frac{B \cdot R}{Hz \cdot \Omega}}$$

Die Rauschspannungsquelle  $\overline{u_{n,th}}$  in Serie zum Widerstand  $R$  in Bild 4.2(c) kann in eine Rauschstromquelle mit Innenwiderstand  $R$  umgerechnet werden:

$$\overline{i_{n,th}^2} = \frac{\overline{u_{n,th}^2}}{R^2} = \frac{4kTBR}{R^2} = \frac{4kTB}{R} \quad \Leftrightarrow \quad i_{n,th,eff} = \sqrt{\overline{i_{n,th}^2}} = \sqrt{\frac{4kTB}{R}} \cong 129 pA \cdot \sqrt{\frac{B}{R}} \cdot \sqrt{\frac{\Omega}{Hz}}$$

## 7.1.2 Stromrauschen

Wasser strömt leise durch eine glatte Rinne und rauscht in einem felsigen Bachbett. Jeder kann die Auswirkungen einer winzigen Nadel ausprobieren, welche diese im glatten Wasserstrom eines Schlauches bewirkt. Ähnlich werden Ladungsträger an Nichtidealitäten im Leiter gestreut. Wegen Streuung des Stromes an Korngrenzen erzeugt ein Kohleschicht-

widerstand mehr Stromrauschen, als ein Metallfilmwiderstand. Aus dem gleichen Grund erzeugt polykristallines Silizium ("Poly") mehr Stromrauschen als monokristallines Silizium, hochdotiertes Silizium bewirkt Streuung mittels Ablenkung durch elektrische Felder.

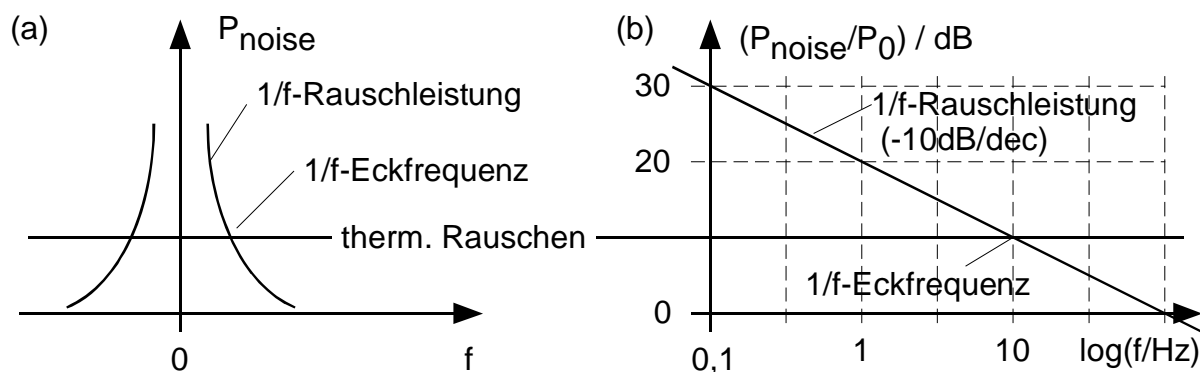
Stromrauschen hängt von der Größe des fließenden Stromes und der physikalischen Beschaffenheit des Bauelementes ab. Simulations-Modelle für Stromrauschen sind rar.

### 7.1.3 1/f – Rauschen (Rosa Rauschen)

Besonders in Halbleitern finden wir das sogenannte 1/f-Rauschen. Weil die hohen Frequenzanteile fehlen, nennt man es in Anlehnung an das Licht auch "rosa Rauschen". Bild 7.1.3(a) skizziert, wie man sich dieses Rauschen über der Frequenzachse qualitativ vorstellen muß. Andere Bezeichnungen für dieses Phänomen sind Funkelrauschen, Flacker-rauschen, oder Flicker Noise.

Man beachte, dass im Bode-Diagramm in Bild 7.1.3(b) die Neigung der Geraden -10dB/dec und nicht -20dB/dec beträgt, da es sich um eine Leistung handelt, nicht um eine Spannung oder einen Strom. Quantitativ ist das 1/f-Rauschen stark vom Bauelement abhängig. Simulations-Modelle für 1/f-Rauschen sind für viele Bauelemente schwer oder überhaupt nicht zu bekommen.

Die Frequenz, bei der das 1/f-Verhalten in die konstante Leistungsdichte des thermischen Rauschens übergeht, bezeichnet man als 1/f-Eckfrequenz (engl.: Noise Corner Frequency)  $f_{NCF}$ . Sie liegt bei Allzweckoperationsverstärkern im 100Hz-Bereich, bei speziellen Typen im Hz-Bereich. Bei MOSFETs setzt das 1/f-Rauschen bereits unterhalb von 100KHz ein. [Hau99]

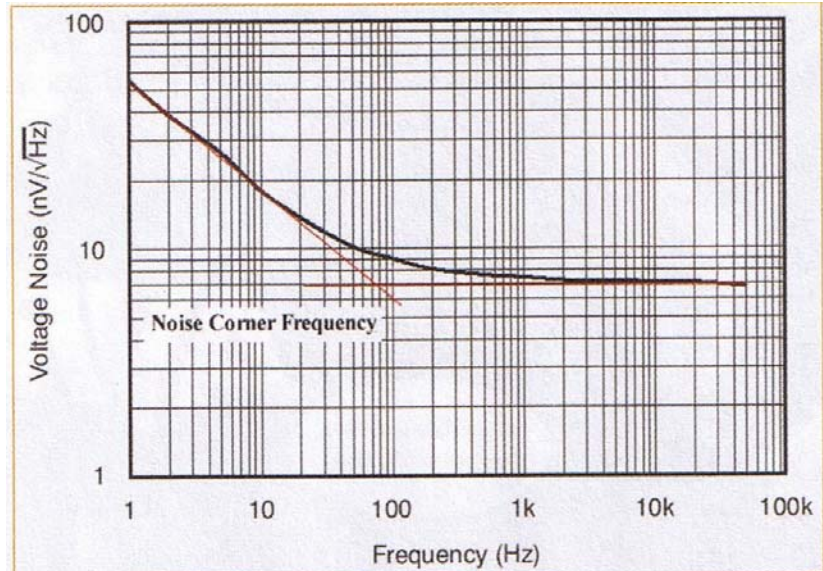


**Bild 7.1.3:** (a) Verlauf des 1/f-Rauschens über der linearen Frequenzachse. (b) Verlauf des 1/f-Rauschens über der logarithmischen Frequenzachse.

Mit dem Ansatz  $P_{n,1/f}(f) = P_{NCF}/f$  für das rosa Rauschen und der Bedingung  $P_{n,1/f}(f=f_{NCF}) = 4kT$  für die 1/f-Eckfrequenz bekommt man die Beziehung

$$P_{NCF} = 4kT \cdot f_{NCF}.$$

**Bild aus [Böd07]:**  
Messung des  $1/f$ -  
Rauschens über  
der Frequenzachse



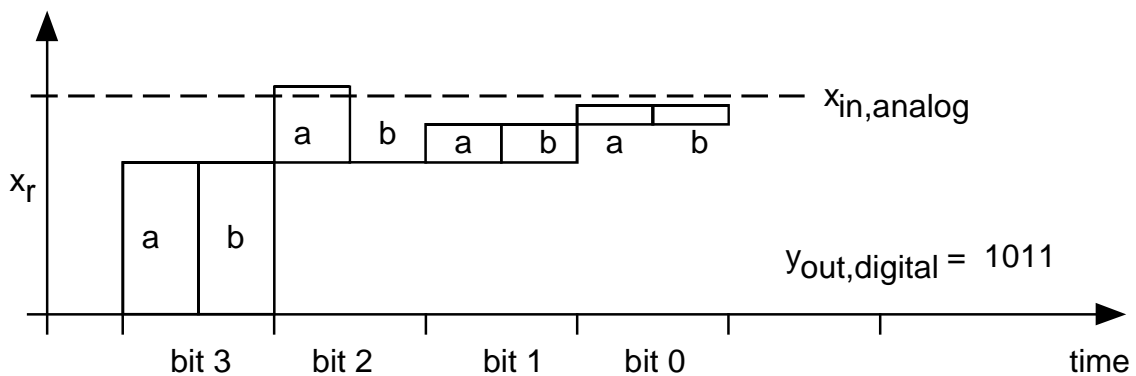
**Bild 2: Spannungsrauschleistungsdichte des Low-Noise-OPVs »OPA376« über der Frequenz**

**Offset.** Der Offset z.B. von Operationsverstärkern wird oft als niederfrequenter Anteil des  $1/f$ -Rauschens betrachtet. Eine Frequenz 0 Hz kann es nicht geben, weil man diese über einen unendlich langen Zeitraum messen müsste. Daher gibt es nur niederfrequente Anteile. Der Offset unterliegt einer Offset-Drift, denn er hängt u.a. von Alterungsprozessen und der Temperatur eines Bauelementes ab.

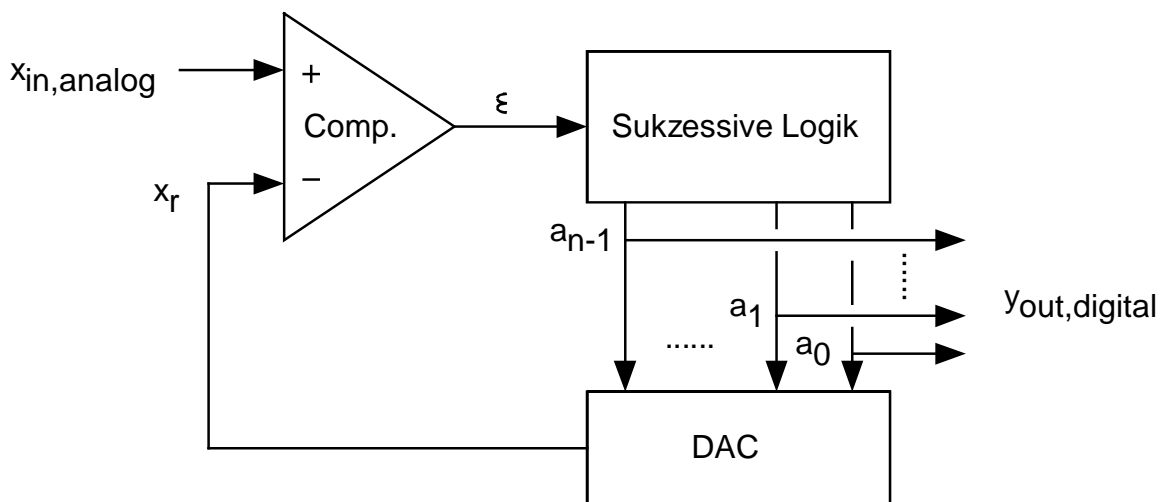
### 7.1.4 Quantisierungsrauschen

Um das Zustandekommen des Quantisierungsrauschen deutlich zu machen, zeigt Bild 7.1.4-1 das Prinzip eines A/D-Wandlers (ADC) mit sukzessiver Approximation. Es ist eines der am weitesten verbreiteten Prinzipien für einen ADC und verlangt folgende Sequenz:

1. Initialisieren: (i) Alle Bits werden auf Null gesetzt; (ii) Indexzähler auf das MSB:  $i=i_{max}$ .
2. (a) Bit  $i$  wird von 0 auf 1 gesetzt und das Ergebnis dem DAC zugeführt -> dieser liefert  $x_r$ .  
 (b) Ist  $x_r \leq x_{in,analog}$  bleibt Bit  $i$  gesetzt, andernfalls wird Bit  $i$  wieder auf 0 zurückgesetzt.
3.  $i$  dekrementieren:  $i \leq i-1$ . Wenn  $i < 0$  -> Konversion fertig, sonst: gehe zu Punkt 2(a).



(a) Prinzip der sukzessiven Approximation (SAR: Successive Approximation Register)



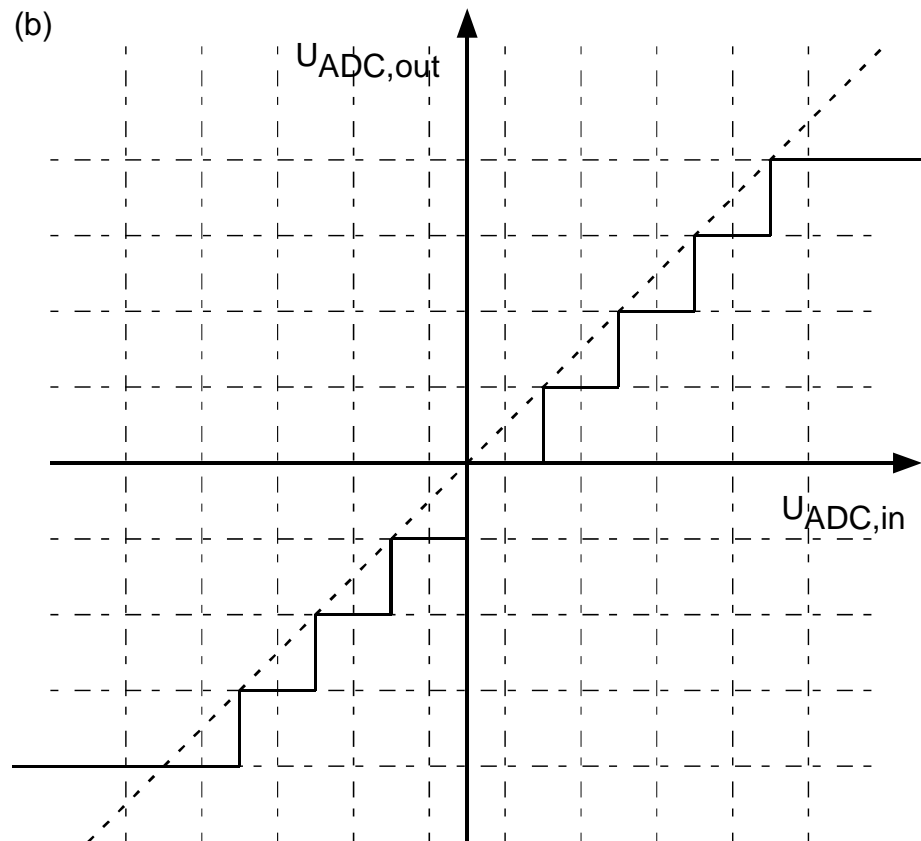
(b) Mögliche Realisierung des Prinzips der sukzessiven Approximation

**Bild 7.1.4-1:** ADC mit sukzessiver Approximation: Der Komparator sorgt für  $x_{DAC,out} = x_r \leq x_{in,analog}$  und damit für einen Offset von  $\frac{1}{2}$  LSB.

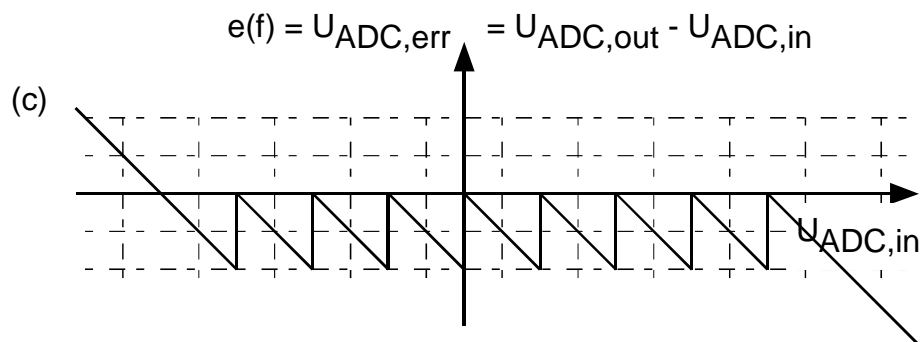
Der in Bild 7.1.4-1 dargestellte ADC mit sukzessiver Approximation erzeugt gemäß Bild 7.1.4-2 einen Offset von  $\frac{1}{2}$  LSB. Daher benutzt man das letzte Bit häufig als „Korrekturbit“ zum Runden. Das Quantisierungsrauschen hat dann die doppelte Amplitude, aber keinen Mittelwert. Ein Bit mehr zu entwickeln vermeidet die doppelte Amplitude.

Bild 7.1.4-2:

(a) Es ist  
 $U_{\text{ADC,out}} \leq U_{\text{ADC,in}}$



(b) Dadurch ist das Quantisierungsrauschen mit einem Offset von  $\frac{1}{2}$  LSB behaftet.



**Beachte:** Die Theorien der Nachrichtentechnik und Regelungstechnik verlangen Linearität, also  $y[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)]=c_1y[x_1(t)]+c_2y[x_2(t)]$ . Diese Forderung enthält die Forderung nach Proportionalität, also  $y[a \cdot x_1(t)] = a \cdot y[x_1(t)]$ . Proportionalität erlaubt keinen Offset!

Das auf diese Weise entstehende Rauschen ist nur von der Eingangsspannung  $U_{\text{in}}$  abhängig, nicht aber von der Frequenz. Daher muss Quantisierungsrauschen über der Frequenzachse konstant sein, so dass man das **Quantisierungsrauschen als weißes Rauschen** annimmt. Erstens gilt dies nur, wenn das Eingangssignal hinreichend bewegt (engl. sufficiently busy) ist. Zweitens wird weißes Quantisierungsrauschen in den seltensten Fällen gemessen (man findet z.B. die Tastefrequenz im Spektrum), die Annahme liefert aber mathematisch gute Resultate [Woo95, All87].

## 7.1.5 Äquivalentes Rauschen

Die äquivalente Rauschquelle existiert nur im Modell, nicht in der Realität. Dabei wird eine Rauschleistung, die sich aus vielen Anteilen zusammensetzen kann, als konzentrierte Rauschspannungsquelle dargestellt.

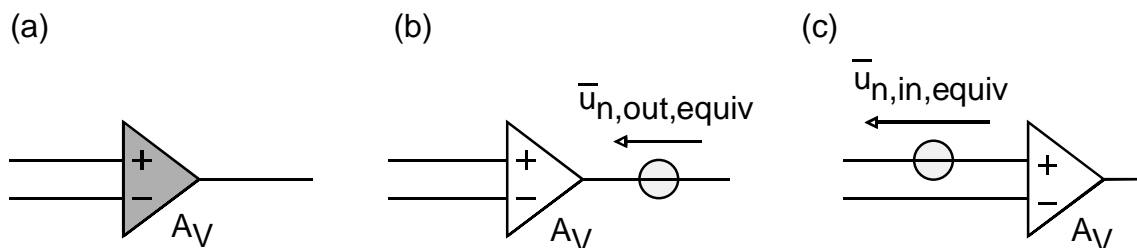
So kann man eine rauschende Baugruppe wie in Bild 7.1.5(a) gemäß Bildteil (b) durch eine rauschfreie Baugruppe und eine äquivalente Rauschquelle am Ausgang ersetzen. Diese wird so berechnet, dass die gesamte Ausgangsrauschleistung der Baugruppe unverändert bleibt. Diese Rauschquelle darf man über lineare Baugruppen hinweg verschieben, wenn man die Übertragungsfunktion  $H(j\omega)$  der Baugruppe berücksichtigt:

$$U_{\text{out}} = H(j\omega) U_{\text{in}} \quad \Leftrightarrow \quad U_{\text{in}} = U_{\text{out}} / H(j\omega)$$

Eine effektive Rauschspannung  $\bar{u}(s)$  ist immer positiv zu nehmen. Daher wird in folgenden Gleichungen die Verstärkung  $A_V(s)$  als Betrag genommen:

$$\bar{u}_{n,\text{out},\text{equiv}}(s) = |A_V(s)| \cdot \bar{u}_{n,\text{in},\text{equiv}}(s) \quad (7.1.5-1)$$

$$\bar{u}_{n,\text{in},\text{equiv}}(s) = \frac{\bar{u}_{n,\text{out},\text{equiv}}(s)}{|A_V(s)|} \quad (7.1.5-2)$$



**Bild 7.1.5:** (a) Rauschender Verstärker, (b) rauschfreier Verstärker, Ausgangs-Rauschleistung zusammengefasst in äquivalenter Ausgangsrauschquelle, (c) rauschfreier Verstärker, gesamte Rauschleistung zusammengefasst in äquiv. Eingangsrauschquelle.

## 7.2 Signal-Rauschleistungs-Verhältnis

### 7.2.1 Definition des Signal-Rauschleistungs-Verhältnisses

Das Signal-Rausch-Verhältnis (SRV) wird in der angelsächsischen Literatur mit Signal-to-Noise Ratio (SNR) bezeichnet. Es ist das Verhältnis von Signalleistung zu Rauschleistung:

$$SRV = SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \frac{u_{signal}^2}{u_{noise}^2} = \frac{i_{signal}^2}{i_{noise}^2}$$

### 7.2.2 Rauschzahl und Zusatzrauschzahl

Der Signal-Rausch-Abstand (SNR), oft auch bezeichnet als Signal-Rausch-Verhältnis SRV, ist der Quotient aus Signalleistung  $P_s$  und Rauschleistung  $P_n$  an einer gegebenen Last.

Die Rauschzahl  $F$  einer Baugruppe beschreibt das Verhältnis der Signal-Rauschabstände am Eingang und am Ausgang.

$$F = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} = \frac{P_{s,in} / P_{n,in}}{P_{s,out} / P_{n,out}} = \frac{P_{s,in}}{P_{s,out}} \frac{P_{n,out}}{P_{n,in}} > 1$$

Bisweilen arbeitet man mit der Zusatzrauschzahl  $F_z$ , die definiert ist durch

$$F = 1 + F_z$$

Nur mit einer völlig rauschfreien Baugruppe könnte man den theoretischen Wert  $F=1$  bzw.  $F_z=0$  erreichen. Mit einer realen Baugruppe, die dem Signal eigenes Rauschen hinzufügt, ist der SNR am Eingang immer größer, als am Ausgang. Daher ist

$$F > 1 \text{ bzw. } F_z > 0.$$

Das Arbeiten wird an dieser Stelle der Vollständigkeit halber erwähnt, aber nicht empfohlen, da es viele Detailprobleme aufwirft. Die Rauschzahl kann nur für ein genau definiertes Eingangsrauschen sinnvoll ermittelt werden und hängt daher u.a. von Details wie dem Ausgangswiderstand des Generators ab.

**Es wird empfohlen, mit Rauschspannungen und Rauschströmen zu arbeiten statt mit der Rauschzahl  $F$ .**



## 7.3 Summation korrelierter und nicht-korrelierter Signale

### 7.3.1 Was ist Korrelation?

Verständnis der folgenden Formeln wird für die Prüfung Schaltungstechnik nicht erwartet. Ein Verständnis der zusammenden Aussagen am Ende ist essentiell.

Gegeben seien zwei mittelwertfreie Signale  $x(t)$  und  $y(t)=u(t) + a \cdot x(t)$ , wobei  $a$  eine Konstante ist. Für  $a=0$  sind die Signale  $x$  und  $y$  unkorreliert. Für  $a \neq 0$ ,  $u(t)=0$  sind die beiden Signale zu 100% korreliert. Die Korrelationsformel fasst diese Aussage mathematisch:

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t-\tau)dt \quad (7.3.1-1)$$

In dieser Formel werden die beiden Signale  $x(t)$  und  $y(t)$  gegeneinander um  $\tau$  Vershoben, multipliziert und anschließend der Mittelwert errechnet. Ist dieser Mittelwert Null, dann sind die Signale nicht korreliert. Die Verschiebung  $\tau$  ist z.B. dann nützlich, wenn wir feststellen wollen, ob zwei Sender in unterschiedlicher Entfernung gleiche oder unterschiedliche Sendesignale aussenden.

Ein Spezialfall der Korrelationsfunktion ist die Autokorrelationsfunktion

$$\phi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t-\tau)dt \quad (7.3.1-2)$$

Das Quadrat der mittleren oder effektiven Spannung, die uns vor allem beim Rauschen interessiert, erhalten wir mit  $\tau=0$  und  $u(t)$  statt  $x(t)$ :

$$\bar{u}^{-2} = \phi_{uu}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t)dt \quad (7.3.1-3)$$

Da  $u^2(t) \geq 0$  ist, muss auch  $\bar{u}^{-2} \geq 0$  sein.

Volkstümlich formuliert gilt:

**Korrelierte Signale** sind voneinander funktional abhängig, d.h. man kann von einem Signal auf das andere in irgendeiner Weise schließen.  $M$  korrelierte Signale ...

- addieren sich in der Amplitude,
- können sich gegenseitig bis zur Auslöschung abschwächen,
- gleicher Signalleistung  $P_1$  können sich zu einer Gesamtleistung  $P_N=M^2 \cdot P_1$  summieren.

**Nicht korrelierte Signale** sind voneinander unabhängiger als die Lottozahlen, von denen man bekanntlich weiß, dass eine bereits gezogene Zahl nicht noch einmal vorkommt.  $M$  unkorrelierte Signale ...

- addieren sich in der Leistung,
- gleicher Signalleistung  $P_1$  können sich bis zu einer Gesamtleistung  $P_{ges}=M \cdot P_1$  summieren.

### 7.3.2 Verbesserung des Signal-Rauschleistungs-Verhältnisses

**Situation 1:** Zur Aufnahme von Vogelstimmen richten Sie ein Mikrofon auf die weit entfernte Schallquelle. Sie stellen fest, dass aufgrund des Eigenrauschens des Mikrophons nur ein Signal-Rausch-Abstand von  $SNR_1 = P_{\text{signal},1} / P_{\text{noise},1} = 20\text{dB}$  erzielt wurde, obwohl Ihr Aufzeichnungsgerät mehr als 60 dB ermöglicht. (Der Index „signal“ steht für das empfangene Nutzsinal, der Index „noise“ kennzeichnet das Rauschsignal.)

Im obigen Beispiel beträgt das Verhältnis der mittleren Spannungen  $U_{\text{signal},1} / U_{\text{noise},1}$

$$U_{\text{signal},1} / U_{\text{noise},1} = 10^{\log_{10}(SNR_1/20)} = 10^{\log_{10}(20/20)} = 10^1 = 10 .$$

Das Verhältnis der mittleren Signalleistungen  $SNR_1 = P_{\text{signal},1} / P_{\text{noise},1}$  ist

$$SNR_{10} = \frac{P_{\text{signal},1}}{P_{\text{noise},1}} = 10^{\log_{10}(SNR_1/10)} = 10^{\log_{10}(20/10)} = 10^2 = 100 .$$

**Situation 2:** Für die nächste Aufzeichnung fertigen Sie ein Array aus 10 x 10 gleichartigen Mikrofonen, welche so angeordnet sind, dass jedes die gleiche Signalinformation  $U_{\text{signal},1}$  und somit die gleiche Signalleistung  $P_{\text{signal},1}$  empfängt.

Das Verhältnis der mittleren Spannungen  $U_{\text{signal},100} / U_{\text{noise},100}$  ist dann

$$\frac{U_{\text{signal},100}}{U_{\text{noise},100}} = \frac{100U_{\text{signal},1}}{\sqrt{100}U_{\text{noise},1}} = 10 \frac{U_{\text{signal},1}}{U_{\text{noise},1}}$$

SNR-Verbesserung  $U_s / U_n$  bei 100 Sensoren im Vergleich zu 1 Sensor: Faktor 10 oder **20dB**.

Das Verhältnis der mittleren Signalleistungen  $P_{\text{signal},100} / P_{\text{noise},100}$  als Funktion von  $SNR_1$  ist nun

$$SNR_{100}(SNR_1) = \frac{P_{\text{signal},100}}{P_{\text{noise},100}} = \frac{100^2 U_{\text{signal},1}^2}{100U_{\text{noise},1}^2} = 100 \frac{P_{\text{signal},1}}{P_{\text{noise},1}} = 100 \cdot SNR_1$$

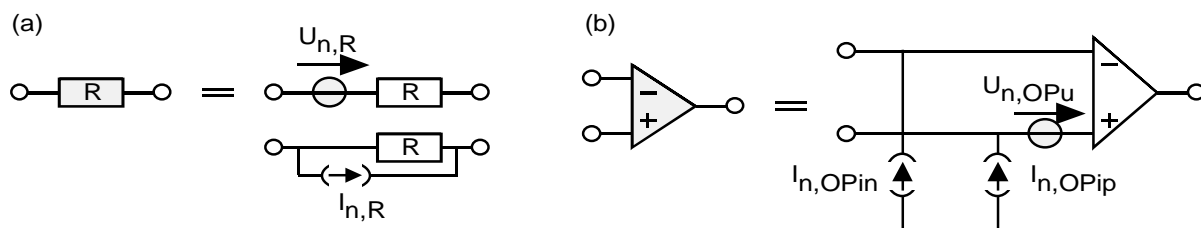
SNR-Verbesserung  $P_s / P_n$  bei 100 Sensoren im Vergleich zu 1 Sensor: Faktor 100 oder **20dB**

Wenn man von einem Mikrofon (oder einem Sensor) zu einem Array von m gleichartigen Mikrofonen (Sensoren) übergeht, verbessert sich der Signal-Rausch-Abstand um den Faktor

$$\frac{SNR_m}{SNR_1} = \frac{P_{\text{signal},m} / P_{\text{noise},m}}{P_{\text{signal},1} / P_{\text{noise},1}} = \frac{m^2 P_{\text{signal},1} / m P_{\text{noise},1}}{P_{\text{signal},1} / P_{\text{noise},1}} = \frac{m^2}{m} = m$$

Das ist ein im Beispiel Verbesserung von **10 log<sub>10</sub>(m) dB**. Auf diesem Prinzip beruhen Antennenarrays, die durch Phasenverschiebungen Richtcharakteristik erzielen können. Man kann auch Mikrofon-Arrays auf einen Sprecher im Publikum fokussieren, ohne dass ein Mikrofon herungereicht werden muß. Dies eröffnet neue Dimensionen des Belauschens eines Gespräches in einer rauschenden Umgebung (z.B. Menschenmenge).

### 7.3.3 Berechnung des Rauschens einer Schaltung mit OP



**Bild 7.3.3-1:**

- (a) Umwandlung eines rauschenden Widerstandes in einen rauschfreien Widerstand und eine Rauschspannungsquelle oder Rauschstromquelle, und  
 (b) Umwandlung eines rauschenden OPs in einen rauschfreien OP sowie eine Rauschspannungsquelle und zwei Rauschstromquellen an dessen Eingang.

Bild 7.3.3-1 illustriert die Umwandlung eines rauschenden Widerstandes und eines rauschenden OP in rauschfreie Bauelemente mit externen Rauschquellen.

Das thermische Rauschen (Johnson Noise) für einen Widerstand gemäß Bild 7.3.3-1(a) kann dargestellt werden als  $U_{n,R} = U_{n,1\Omega,1Hz} \sqrt{RB}$ . Wegen  $U_{n,R} = \sqrt{4kTRB} = \sqrt{4kT} \cdot \sqrt{RB} = U_{n,1\Omega,1Hz} \cdot \sqrt{RB}$  und  $k=1,38 \cdot 10^{-23} \text{ VAs/K}$  ist die spektrale Rauschspannungsdichte pro  $\Omega$  und Hz

$$U_{n,1\Omega,1Hz} = \sqrt{4kT} = \sqrt{4 \cdot 300K \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ VAs} / K} = 129 \text{ pV} / \sqrt{\Omega \text{ Hz}}$$

Da Rauschen von Natur aus eine spektrale Energiedichte ist, erhält man für die auf einen Widerstand bezogene Spannung die physikalische Dimension  $1/\sqrt{\text{Hz}}$ .

Gemäß Bild 7.3.3-1(a) kann die Rauschspannungsquelle umgerechnet werden in eine Rauschstromquelle. Mit

$$I_{n,R} = \frac{U_{n,R}}{R} I_{n,1\Omega,1Hz} = \sqrt{4kTB/R} = \sqrt{4kT} \sqrt{B/R} = 129 \text{ pA} \sqrt{\Omega / \text{Hz}}$$

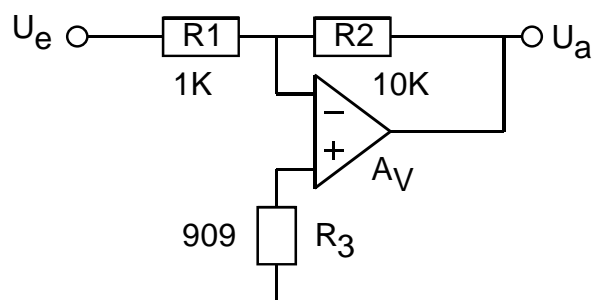
erhält man den Faktor  $I_{n,1\Omega,1Hz}$  für die spektrale Rauschstromdichte zu

$$I_{n,1\Omega,1Hz} = 129 \text{ pA} \sqrt{\Omega / \text{Hz}} .$$

Das Rauschen für den Invertierer in Bild 7.3.3-2 soll im folgenden beispielhaft berechnet werden. Die interessierende Bandbreite betrage  $B=10\text{KHz}$ . (Die Rechnung folgt im Prinzip dem Vorgehen des Analyseprogrammes Spice.)

**Bild 7.3.3-2:**

Operationsverstärker beschaltet als Invertierer. Es wird eine sehr hohe Verstärkung  $A_V$  des OP vorausgesetzt.

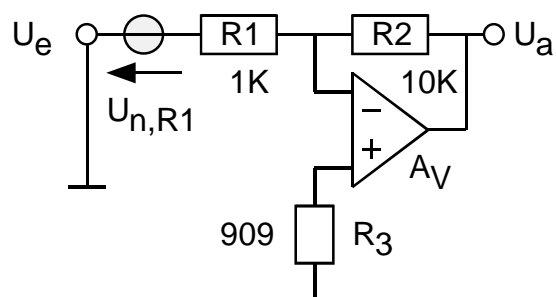


Bei OPs mit bipolarem Eingang schaltet man zur Kompensation des DC-Offset-Stromes einen Widerstand vor den positiven Eingang, z.B. den Widerstand  $R_3$  in Bild 7.3.3-2. Dieser beträgt aus Symmetriegründen

$$R_3 = R_1 || R_2 .$$

**Bild 7.3.3-3:**

Wirkung des Rauschens des Widerstandes  $R_1$  auf den Ausgang  $U_a$ .



Die effektive thermische Rauschspannung  $U_{n,R1}$  des Widerstandes  $R_1$  für  $B=10\text{KHz}$  beträgt

$$U_{n,R1} = U_{n,1\Omega,1\text{Hz}} \sqrt{R_1 B / \Omega\text{Hz}} = 129\text{pV} \cdot \sqrt{1\text{K}\Omega \cdot 10\text{KHz} / \Omega\text{Hz}} = 0,408\mu\text{V}$$

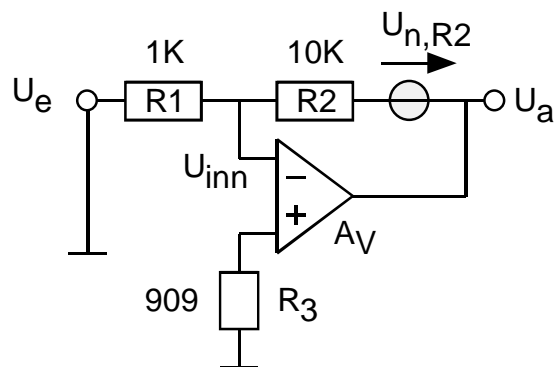
$U_{n,R1}$  addiert sich zum Eingangssignal  $U_e$  und wird wie dieses verstärkt. Daher beträgt die Wirkung dieses Rauschens auf den Ausgang gemäß Bild 7.3.3-3

$$\underline{U_{n,a,R1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot U_{n,R1} = -10 \cdot 0,408\mu\text{V} = -4,08\mu\text{V}}$$

Beachte: Widerstand und Spannungsquelle in Serie dürfen vertauscht werden. Es spielt in Bild 7.3.3-3 daher keine Rolle, ob die Spannungsquelle  $U_{n,R1}$  am Eingang der Schaltung oder vor dem invertierenden Eingang des OPs eingezeichnet wird.

**Bild 7.3.3-4:**

Wirkung des Rauschens des Widerstandes  $R_2$  auf den Ausgang  $U_a$ .



Die effektive therm. Rauschspannung  $U_{n,R2}$  des Widerstandes  $R_2$  in Bild 7.3.3-4 beträgt

$$U_{n,R2} = U_{n,1\Omega,1Hz} \sqrt{R_2 B / \Omega Hz} = 129 \text{ pV} \cdot \sqrt{10 \text{ K}\Omega \cdot 10 \text{ KHz} / \Omega Hz} = 1,29 \mu\text{V}$$

Ströme und Spannungen innerhalb der Schaltung bleiben unverändert. Daher muß  $U_{n,R2}$  durch die Ausgangsspannung ausgeglichen werden. Man kann auch die Maschengleichungen aufstellen:

$$U_{n,e}=0 \rightarrow I_{n,R1}=0 \rightarrow I_{n,R2}=I_{n,R1}=0$$

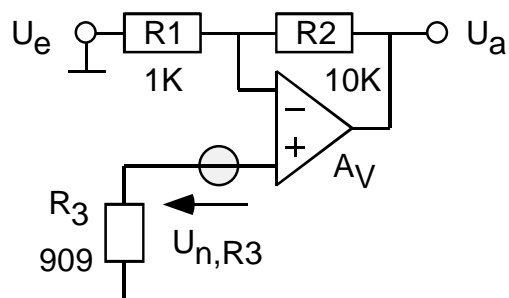
$$U_{n,a} = U_{inn} - I_{n,R2} \cdot R_2 - U_{n,R2} = 0 - 0 - U_{n,R2} = -U_{n,R2}$$

Daher ist die Wirkung des Rauschens des Widerstandes  $R_2$  auf den Ausgang

$$\underline{U_{n,a,R2} = -U_{n,R2} = -1,29 \mu\text{V}}$$

**Bild 7.3.3-5:**

Wirkung des Rauschens des Widerstandes  $R_3$  auf den Ausgang  $U_a$ .



Die effektive therm. Rauschspannung  $U_{n,R3}$  des Widerstandes  $R_3$  gemäß Bild 7.3.3-5 beträgt

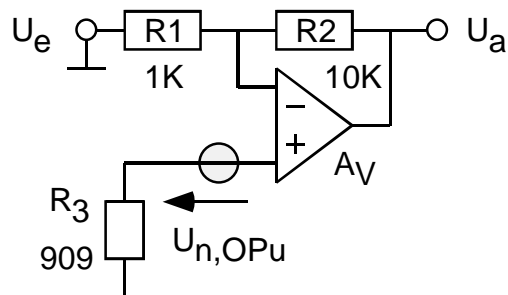
$$U_{n,R3} = U_{n,1\Omega,1Hz} \sqrt{R_3 B / \Omega Hz} = 129 \text{ pV} \cdot \sqrt{909 \Omega \cdot 10 \text{ KHz} / \Omega Hz} = 0,389 \mu\text{V}$$

$U_{n,R3}$  betreibt den OP als Nicht-Invertierer. Daher ist

$$\underline{U_{n,a,R3} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_{n,R3} = \frac{10 + 1}{1} \cdot 0,389 \mu\text{V} = 4,28 \mu\text{V}}$$

**Bild 7.3.3-6:**

Wirkung der äquivalenten Eingangsräuschspannung  $U_{n,OPu}$  des OPs auf den Ausgang  $U_a$ .



Gegeben ist für den bipolaren OP027 von Analog Devices  $U_{n,OP,1Hz} = 3,0nV / \sqrt{Hz}$ . Die effektive Rauschspannung  $U_{n,OPu}$  gemäß Bild 7.3.3-6 ergibt sich damit für  $B=10KHz$  zu

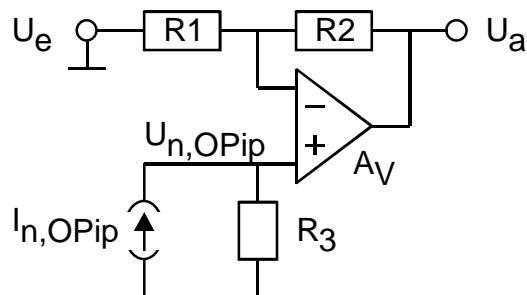
$$U_{n,OPu} = U_{n,OP,1Hz} \cdot \sqrt{B / Hz} = 3nV \cdot \sqrt{10KHz / Hz} = 0,3\mu V$$

$U_{n,OPu}$  betreibt den OP als Nicht-Invertierer. Daher berechnet sich die Wirkung des äquivalenten Eingangsräuschens  $U_{n,OPu}$  des OPs auf den Ausgang auf den Ausgang zu

$$U_{n,a,OPu} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_{n,OP} = \frac{10+1}{1} \cdot 0,3\mu V = 3,30\mu V$$

**Bild 7.3.3-7:**

Wirkung des Rauschens des äquivalenten Eingangsräuschstromes  $I_{n,OPip}$  auf den Ausgang  $U_a$ .



Gegeben ist für den bipolaren OP027 von Analog Devices  $I_{n,OP,1Hz} = 0,4pA / \sqrt{Hz}$  für beide Eingänge. Der Eingangsräuschstrom berechnet sich für  $B=10KHz$  zu

$$I_{n,OPip} = I_{n,OP,1Hz} \cdot \sqrt{B / Hz} = 0,4pA \cdot \sqrt{10KHz / Hz} = 40pA$$

Gemäß Bild 7.3.3-7 verursacht der Rauschstrom  $I_{n,OPip}$  am positiven Eingang des OPs in Bild 7.3.3-7 eine Rauschspannung von

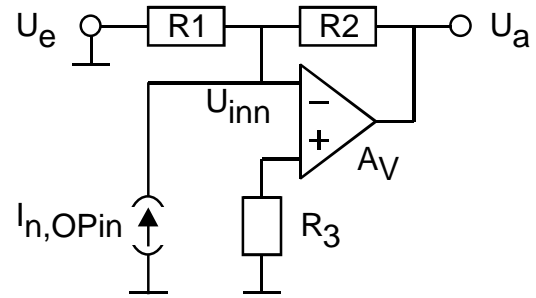
$$U_{n,OPip} = I_{n,OP,1Hz} \cdot \sqrt{B / Hz} \cdot R_3 = 0,4pA \cdot \sqrt{10KHz / Hz} \cdot 909\Omega = 36,4nV$$

$U_{n,OPip}$  betreibt den OP als Nicht-Invertierer. Daher berechnet sich die Wirkung des äquivalenten Eingangsräuschstromes  $I_{n,OPip}$  des OPs auf den Ausgang zu

$$U_{n,a,OPip} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_{n,OPip} = \frac{10+1}{1} \cdot 36,4nV = 0,400\mu V$$

**Bild 7.3.3-8:**

Wirkung des Rauschens des äquivalenten Eingangsrauschstromes  $I_{n,OPin}$  auf den Ausgang  $U_a$ .



Gegeben ist für den bipolaren OP OP027 von Analog Devices  $I_{n,OP,1Hz} = 0,4pA/\sqrt{Hz}$  für beide Eingänge. Der effektiven Rauschstrom  $I_{n,OPin}$  für  $B=10KHz$  ergibt sich somit ebenfalls zu

$$I_{n,OPin} = I_{n,OP,1Hz} \cdot \sqrt{B/Hz} = 0,4pA \cdot \sqrt{10KHz/Hz} = 40pA$$

$I_{n,OPin}$  kann nur über  $R_2$  abfließen, denn  $U_{inn}$  wird durch den virtuellen Kurzschluss zwischen den Eingängen des OPs konstant gehalten, wodurch sich der Strom durch  $R_1$  unabhängig von  $I_{n,OPin}$  zu  $I_{R1}=(U_{inn}-U_e)/R_1$  berechnet. Damit erhält man gemäß Bild 7.3.3-8 die Wirkung des äquivalenten Eingangsrauschstromes  $I_{n,OPin}$  auf den Ausgang zu

$$\underline{U_{n,a,OPin} = -R_2 \cdot I_{n,OPin} = -10K\Omega \cdot 40pA = -0,4\mu V}$$

Um die **gesamte effektive Ausgangsrauschspannung**  $U_{n,a}$  der Schaltung zu erhalten, müssen alle einzelnen Beiträge quadratisch addiert werden:

$$\begin{aligned} U_{n,a}^2 &= U_{n,a,R1}^2 + U_{n,a,R2}^2 + U_{n,a,R3}^2 + U_{n,a,OPu}^2 + U_{n,a,OPip}^2 + U_{n,a,OPin}^2 \\ &= (4,08^2 + 1,29^2 + 4,28^2 + 3,30^2 + 0,40^2 + 0,40^2)\mu V^2 = 47,84\mu V^2 \end{aligned}$$

$$\underline{U_{n,a} = 6,92\mu V}$$

Dieser Wert kann mit Hilfe eines Analyseprogrammes Spice mit dem Schlüsselwort ONOISE berechnet werden.

Diese Spannungsquelle kann man dann an einen Beliebigen Punkt der Schaltung verschieben, z.B. an den Eingang der Schaltung oder den Eingang OPs. Da man Spannungsquelle und Widerstand vertauschen darf, liefern in diesem Fall beide Möglichkeiten das gleiche Ergebnis. Diese Umrechnung ist in Spice optional und wird mit dem Schlüsselwort INOISE angefordert.

Die Schaltung hat eine Verstärkung von  $A_V=-R_2/R_1=-10$ . Daher ergibt sich die äquivalente Eingangsrauschspannungsquelle zu

$$U_{n,i} = \left| \frac{U_{n,a}}{A_V} \right| = \left| \frac{6,92\mu V}{-10} \right| = 0,692\mu V$$

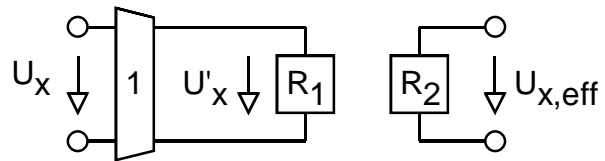
## 7.4 Berechnung der mittleren Rauschleistung

### 7.4.1 Berechnung mittlerer und effektiver Spannungen

- **Der Mittelwert**  $U_{x,DC}$  einer Spannung  $U_x$  ist eine Gleichspannung, welche den Gleichanteil von  $U_x$  angibt.
- **Der Effektivwert**  $U_{x,eff}$  einer Spannung  $U_x$  ist eine Gleichspannung, welche im zeitlichen Mittel die gleiche Leistung an einen Widerstand abgibt wie die Spannung  $U_x$ .

Mittelwertbildung kann man mit Hilfe von Tiefpässen erreichen. Wegen der Unwägbarkeiten möglicher Spannungsverläufe ist die numerische Integration von Effektivwerten schierig.

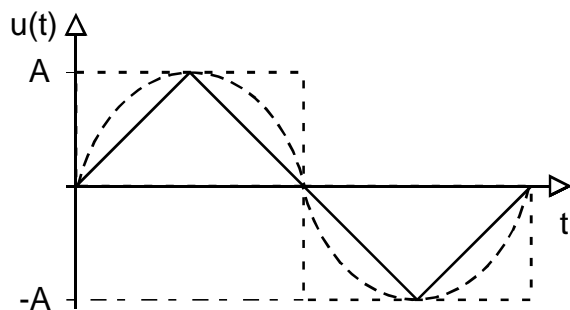
Hochwertige Effektivwertmessgeräte erwärmen einen Referenzwiderstand  $R_2$  mit einer Gleichspannung  $U_{x,eff}$  so, dass er genauso warm wird wie der Messwiderstand  $R_1=R_2$  an der Spannung  $U'_x$ . (Die Pufferung von  $U_x$  auf  $U'_x=U_x$  entkoppelt die Meßgröße  $U_x$  von dem Meßwiderstand  $R_1$ .)



**Bild 7.4.1-1:** Messung von  $U_{x,eff}$  durch Erwärmen des Referenzwiderstandes  $R_2$ .

Mittelwert einer Spannung $u(t)$	Mittelwert des Quadrates $u^2(t)$ einer Spannung $u(t)$	Effektivwert von $u(t)$ und für die Summe unkorrelierter $u_i(t)$
$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot dt$	$\overline{u^2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) \cdot dt$	$u_{eff} = \sqrt{\overline{u^2}}, \quad u_{eff,ges} = \sqrt{\sum_i u_{eff,i}^2}$

Bild 7.4.1-2 illustriert die Effektivwerte der wichtigsten Spannungsformen. Bei der 50:50-Rechteckform hilft einfaches Gleichrichten, um die Lösung zu verdeutlichen. Die Sinuskurve verdeckt deutlich weniger Fläche als die Rechteckkurve und mehr als die Dreieckkurve.



Recheckform 50%:50%:  $A/\sqrt{1} = A$

Sinusform:  $A/\sqrt{2}$

Dreieckform:  $A/\sqrt{3}$

**Bild 7.4.1-2:** Wellenformen  $u(t)$ : 50%:50%-Rechteck-, Dreieck-, Sinusform



### 7.4.1.1 Effektivwerte sinusförmiger Spannungen

**Mittelwert von  $u(t)=\hat{u} \cos(2\pi t/T)$**  (gleich Mittelwert über eine Periode  $t=0\dots T$ ).

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{u} \cdot \cos(2\pi t/T) \cdot dt = \hat{u} (\sin(2\pi) - \sin(0)) = -\hat{u}(0 - 0) = 0$$

**Mittelwert von  $u^2(t)$**  in der Periode  $t=0\dots T$  unter Nutzung der Beziehung  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ .

$$\overline{u^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{u}^2}{2} (1 - \cos(4\pi t/T)) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{u}^2}{2} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{u}^2}{2} \cos(4\pi t/T) dt = \frac{\hat{u}^2}{2} + 0 = \frac{\hat{u}^2}{2}$$

Effektivwert  $u_{\text{eff}}$  von  $u(t)=\hat{u} \cos(\omega t)$ .

$$u_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

**Mittelwert von  $u_{\text{ges}}(t)=\hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{u}_2 \cos(\omega_2 t)$  für  $\omega_1 \neq \omega_2$ .**

$$\bar{u} = \overline{\hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{u}_2 \cos(\omega_2 t)} = 0 + 0 = 0$$

**Mittelwert von  $u_{\text{ges}}^2(t)$**  unter Nutzung der Beziehung  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

$$\begin{aligned} \overline{u_{\text{ges}}^2} &= \overline{(\hat{u}_1 \cos \omega_1 t + \hat{u}_2 \cos \omega_2 t)^2} \\ &= \overline{\hat{u}_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + 2\hat{u}_1 \hat{u}_2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) + \hat{u}_2^2 \cos^2(\omega_2 t)} \\ &= \overline{\hat{u}_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + 2\hat{u}_1 \hat{u}_2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) + \hat{u}_2^2 \cos^2(\omega_2 t)} \\ &= \hat{u}_1^2 / 2 + \overline{(\hat{u}_1 \hat{u}_2 (\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t))} + \hat{u}_2^2 / 2 \\ &= \hat{u}_1^2 / 2 + \overline{\hat{u}_1 \hat{u}_2 (\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \hat{u}_1 \hat{u}_2 \cos(\omega_1 + \omega_2)t} + \hat{u}_2^2 / 2 \\ &= \hat{u}_1^2 / 2 + 0 + 0 + \hat{u}_2^2 / 2 \quad | \omega_1 \neq \omega_2! \Rightarrow \overline{\cos(\omega_1 - \omega_2)t} = 0 \\ &= \hat{u}_1^2 / 2 + \hat{u}_2^2 / 2 \Rightarrow \quad \underline{\underline{\text{Unterschiedliche Frequenzen summieren sich in der Leistung!}}} \end{aligned}$$

**Mittelwert von  $u_{\text{tot}}^2(t)=(\hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{u}_2 \cos(\omega_2 t) + \dots + \hat{u}_m \cos(\omega_m t))^2$ ,  $\omega_i \neq \omega_j$  wenn  $i \neq j$ :**

$$\overline{u_{\text{tot}}^2} = \overline{\left( \sum_{i=1}^m \hat{u}_i \cos \omega_i t \right)^2} = \sum_{i=1}^m \frac{\hat{u}_i^2}{2}$$

**Leistung  $P'(f)$  im Frequenzband  $f \dots f+df$ :**  $P'(f) \cdot df = \frac{\overline{u^2}(f)}{R} df$ ,

**Gesamtleistung im Frequenzband  $f_1 \dots f_2$ :**  $P = \int_{f_1}^{f_2} \frac{\overline{u^2}(f)}{R} df \Leftrightarrow u_{\text{eff}} = \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} \overline{u^2}(f) \cdot df}$

7.4.1.2 Effektivwert dreieckförmiger Spannungen

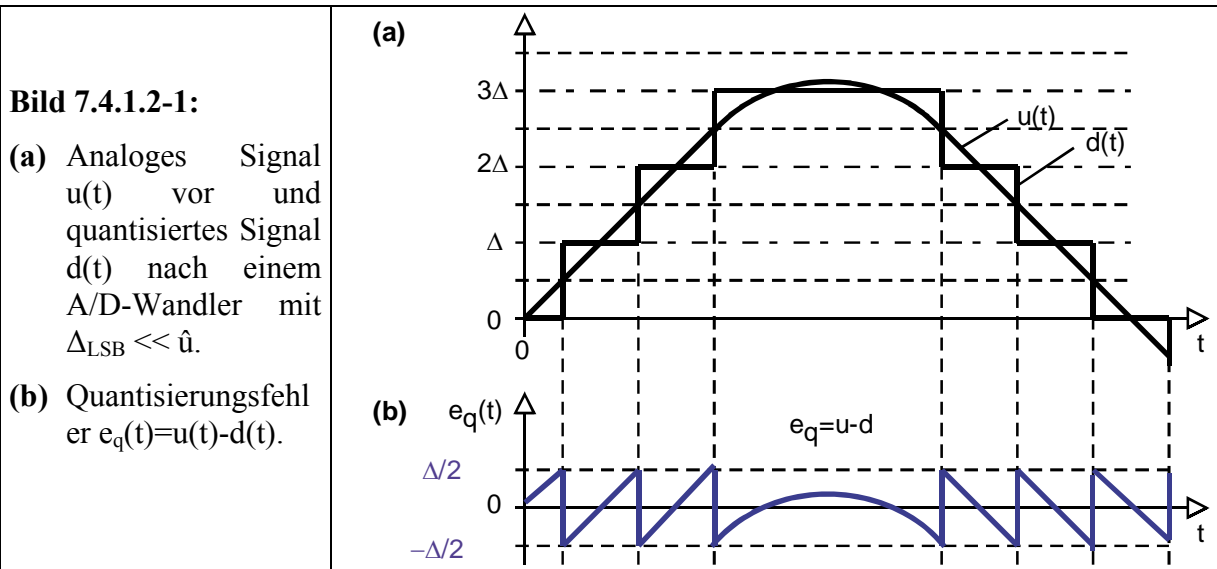
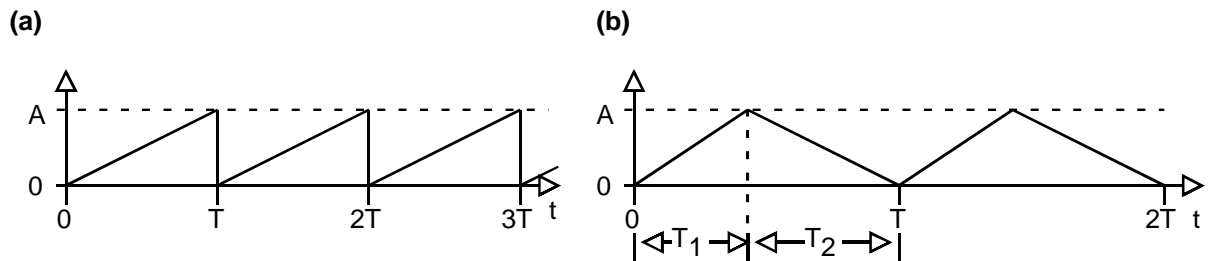


Bild 7.4.1.2-1 (a) zeigt ein analoges Signal  $u(t)$  vor und das zugehörige quantisierte Signal  $d(t)$  nach einem A/D-Wandler. Die Amplitude  $\hat{u}$  des zeitkontinuierlichen Signals  $u(t)$  ist sehr viel größer, als der kleinstmögliche Sprung  $\Delta$  des A/D-Wandlers. Bildteil (b) veranschaulicht, dass das Quantisierungsrauschen  $e_q(t) = d(t) - u(t)$  bei hinreichend bewegtem Signal  $u(t)$  überwiegend dreieckförmig ist. Daher nimmt man für das Quantisierungsrauschen hinreichend bewegter (engl.: sufficiently busy) Signale Dreiecksform mit Amplitude  $\Delta/2$  an.



**Bild 7.4.1.2-1:** (a) Sägezahnspannung mit rechtwinkligen Dreiecken der Höhe  $A$ ; (b) periodisches Signal mit beliebigen Dreiecken der Höhe  $A$ .

Bild 7.4.1.2-1(a) zeigt ein periodisches Signal aus dreieckförmigen Rampen, deren Steigung  $m$  im Bereich  $t=0 \dots T$  beträgt  $m = A / T$ . Der Mittelwert  $\bar{u}$  dieser Sägezahnspannung kann durch Anwendung der oben angegebenen Formel zur Mittelwertbildung auf  $u(t) = m \cdot t$  über dem Intervall  $t=0 \dots T$  berechnet werden:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T m \cdot t \cdot dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{A}{T} \frac{1}{2} t^2 \right]_0^T = \frac{A}{T^2} \frac{1}{2} (T^2 - 0^2) = \frac{A}{2}$$

(Wer die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks kennt, kann sich diese Rechnung auch sparen.) Wichtig: Der Flächeninhalt und somit der Mittelwert hängt nicht von der Breite und auch nicht von der Form des Dreiecks ab, sondern allein von dessen Höhe. Bild 7.4.1.2-1(b) illustriert, dass sich beliebige Dreiecke der Höhe  $A$  lassen sich in zwei rechtwinklige Dreiecke der Höhe  $A$  unterteilen; ein jedes hat den Mittelwert  $A/2$ .

Die Rauschleistung  $\overline{u^2} / R$  dieser dreieckförmigen Spannung ist proportional zum Mittelwert von  $u^2(t)$ , der durch Anwendung der oben angegebenen Formel auf  $u(t)=m \cdot t$  über dem Intervall  $t=0 \dots T$  berechnet werden kann:

$$\overline{u^2} = \frac{1}{T} \int_0^T (m \cdot t)^2 \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A^2}{T^2} t^2 dt = \frac{1}{T} \left[ \frac{A^2}{3T^2} t^3 \right]_0^T = \frac{A^2}{3T^3} (T^3 - 0^3) = \frac{A^2}{3}$$

Der Effektivwert ergibt sich aus dessen Quadratwurzel:

$$u_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{u^2}} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

Wenn sich Dreiecke mit positiver und negativer Amplitude abwechseln, ändert sich zwar der Mittelwert, nicht aber der Effektivwert des Signals, da das Quadrat in  $u_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{u^2}}$  das Vorzeichen löscht.

Bild 7.4.1.2-1 (b) zeigt ein überwiegend dreieckförmiges Quantisierungsrauschen im Spannungsbereich  $\pm \frac{1}{2} \Delta$  und mit dem Mittelwert 0. Der Effektivwert  $e_{q,\text{eff}}$  liegt also nah beim Effektivwert für ein dreieckförmiges Rauschen und beträgt mit  $A=\Delta/2$ .

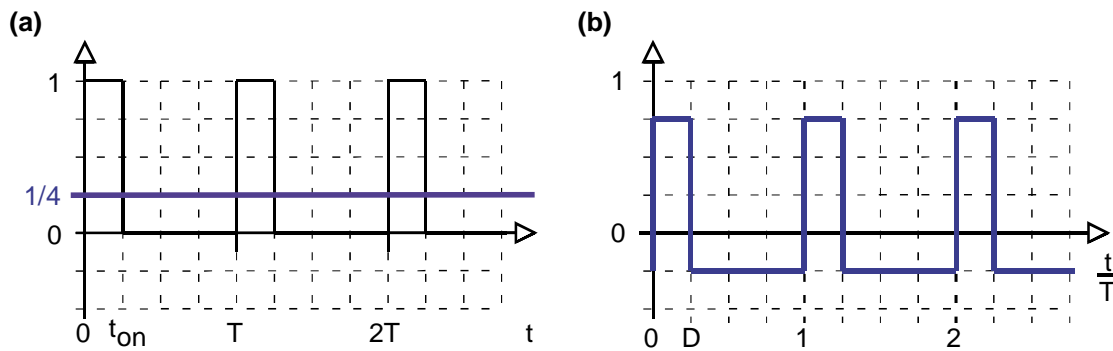
$$e_{q,\text{eff}} = \frac{|A|}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta/2}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}$$

Dies ist ein Wert, den man überall in der Literatur findet, selbst dort, wo er nicht erlaubt ist, weil z.B. der 1-Bit-Quantisierer der Pulsweitenmodulation (PWM) mit  $\Delta_{\text{LSB}} \gg \hat{u}$  kein dreieckförmiges Rauschen erzeugt.

**Hinweis:** Das gleiche Ergebnis könnte man erreichen, indem man die Sägezahnspannung nach Fourier in ihre Grund- und Oberwellen zerlegt und diese anschließend in der Leistung summiert.

**Erinnerung:** Der Mittelwert des A/D-gewandelten Signals ist das gesuchte Nutzsignal, der Effektivwert des Rauschens ist das zu unterdrückende Störsignal. Tiefpässe dienen in der Regel dazu, diese beiden Signale voneinander so weit wie möglich zu trennen, indem die unerwünschten Frequenzanteile ausserhalb der benötigten Bandbreite unterdrückt werden. Die Bandbreite darf also nicht größer als unbedingt nötig sein.

7.4.1.3 Effektivwert rechteckförmiger Spannungen



**Bild 7.4.1.3:** (a) Rechteckförmiger Spannungsverlauf eines periodischen Signals mit Duty-Cycle  $D=t_{on}/T$ ; (b) Quantisierungsrauschen eines Signals mit Pulsweitenmodulation.

Der Mittelwert  $\bar{u}$  des periodischen Signals in Bild 7.4.1.3(a) berechnet sich unter Anwendung der oben angegebenen Formel zu

$\bar{u} = D$  im obigen Beispiel also zu  $\bar{u} = 1/4$ .

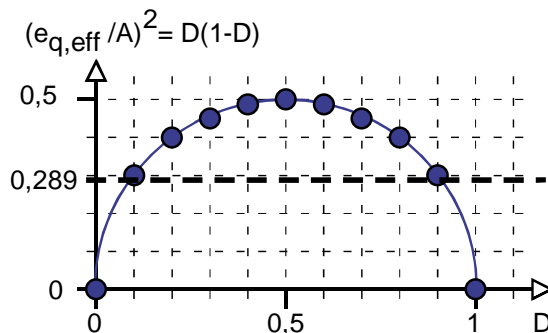
In Bild 7.4.1.3(a) ist Mittelwert als blau gestrichelte Linie eingezeichnet. Dieser Mittelwert ist bei übertastenden Modulatoren das zu transportierende Nutzsignal. Das Quantisierungsrauschen ist davon durch Tiefpassfilterung zu trennen.

Bild 7.4.1.3(b) zeigt das Quantisierungsrauschen  $e_q(t) = \bar{u}(t) - D \cdot A$ . Was uns interessiert ist die Rauschleistung, die sich als Mittelwert von  $e_q^2$  mit  $x' = x/T$  berechnet zu

$\overline{e_q^2} = D \cdot (1-D)$ , bzw. die effektive Rauschspannung  $e_{q,eff} = \sqrt{\overline{e_q^2}} = \sqrt{D(1-D)}$ . Für eine Amplitude  $A$  statt 1 erhalten wir entsprechend  $\overline{e_q^2} = A^2 \cdot D \cdot (1-D)$  und  $e_{q,eff} = A \sqrt{D(1-D)}$ .

Bild 7.4.1.3(c) zeigt, dass die Rauschleistung für ein 50:50-Rechteck ( $D=1/2$ ) maximal ist. Eingezeichnet ist auch  $1/\sqrt{12} \cong 0,2887$ , der Wert für dreieckförmige Rauschspannungen.

D	$(e_{q,eff}/A)^2$	D	$(e_{q,eff}/A)^2$
0	0	1	0
0,1	0,3	0,9	0,3
0,2	0,4	0,8	0,4
0,3	0,458	0,7	0,458
0,4	0,490	0,6	0,490
0,5	0,5	0,5	0,5



**Bild 7.4.1.3:** (c): Effektive Rauschspannung  $e_{q,eff}$  als Funktion von  $D=t_{on}/T$  gem. Bild 7.4.1.3.

**Mathematischer Nachweis obiger Formel:**

Behauptung:  $\overline{e_q^2} = D \cdot (1-D)$ , wobei Duty-Cycle  $D = t_{on} / T$ .

Beweis:

$$\begin{aligned}\overline{e_q^2} &= \frac{1}{T} \int_0^T e_q^2(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{t_{on}} (1-D)^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{t_{on}}^T (-D)^2 \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \left[ (1-D)^2 t_{on} + D^2 (T - t_{on}) \right] \\ &= (1-D)^2 D + D^2 (1-D) \\ &= D(1-D)\end{aligned}$$

**Erinnerung:** Der Mittelwert des Signals ist das gesuchte Nutzsinal, der Effektivwert des Rauschens ist das zu unterdrückende Störsignal. Tiefpässe dienen in der Regel dazu, diese beiden Signale voneinander so weit wie möglich zu trennen, indem die unerwünschten Frequenzanteile ausserhalb des Basisbandes unterdrückt werden.

## 7.5 Arbeiten mit spektralen Rauschleistungsdichten

**Erinnerung:** Alle Größen über der Frequenzachse, also Funktion von  $f$ ,  $\omega$  oder der Laplace-Variablen  $s$  bzw.  $p$ , sind spektrale Dichtewerte, z.B.  $U(jf)$ . Diese Größen müssen vor der Summation oder Integration quadriert werden, um einen quadratischen Mittelwert, z.B.  $\overline{U^2}$ , oder einen Effektivwert, z.B.  $U_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{U^2}}$ , zu liefern.

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen  $U_1 = \hat{U}_1 e^{j\varphi_1}$  und  $U_2 = \hat{U}_2 e^{j\varphi_2}$  liefert mit  $U_1 U_2 = \hat{U}_1 \hat{U}_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$  ein Ergebnis, welches die Beträge der Zahlen multipliziert und die Phasen addiert. Interessiert uns nur die Leistung oder der Effektivwert eines Signals, ist die Phaseninformation irrelevant. Der Ausdruck

$$U_{\text{out}}(j\omega) = H(j\omega) \cdot U_{\text{in}}(j\omega) \quad \text{oder} \quad U_{\text{out}}(jf) = H(jf) \cdot U_{\text{in}}(jf)$$

vereinfacht sich zu

$$|U_{\text{out}}(jf)| = |H(jf)| \cdot |U_{\text{in}}(jf)| \quad \Leftrightarrow \quad |U_{\text{out}}(jf)|^2 = |H(jf)|^2 \cdot |U_{\text{in}}(jf)|^2$$

Man beachte, das bei komplexen Zahlen  $U^2(jf) = \hat{U} e^{j2\varphi} \neq |U(jf)|^2$ .

In Bild 7.5-1 wird das thermische, weiße Rauschen des Widerstandes  $R$  als Eingangssignal für den dargestellten RC-Tiefpass verwendet. Seine Übertragungsfunktion ist gegeben mit

$$H_{RC}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_g} = \frac{1}{1 + j2\pi f / 2\pi f_g} \quad \text{oder} \quad H_{RC}(jf) = \frac{1}{1 + jf / f_g}$$

mit  $\omega_g = 2\pi f_g = 1/RC$ . Damit ergibt sich  $|H_{RC}(f)|^2$  zu

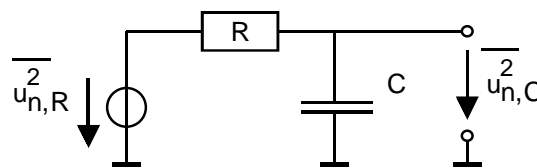
$$|H_{RC}(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f / f_g)^2}$$

Angewendet auf das vom Widerstand  $R$  erzeugte Rauschspektrum  $|U_{n,R}(f)|^2 = 4kTR$  an der Kapazität  $C$  in Bild 7.5-1 liefert dies eine spektrale Rauschspannungsverteilung von

$$|U_{n,C}(f)|^2 = |H_{RC}(f)|^2 \cdot |U_{n,R}(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f / f_g)^2} \cdot 4kTR.$$

**Bild 7.5-1:**

Berechnung des durch thermisches Rauschen des Widerstands verursachtes Rauschspektrum am Ausgang des RC-Tiefpasses



Die gesamte Ausgangsrauschspannung über der Kapazität C ergibt sich also zu

$$\overline{U_{n,C}^2} = \int_{f=0}^{\infty} |U_{n,C}(f)|^2 \cdot df = \int_{f=0}^{\infty} \frac{1}{1+(f/f_g)^2} \cdot 4kTR \cdot df = 4kTR \int_{f=0}^{\infty} \frac{df}{1+(f/f_g)^2}$$

wobei  $|U_{n,R}(f)|^2 = 4kTR$ . Dieses Integral lässt sich exakt und näherungsweise lösen.

**Exakte Rechnung** mit  $\int \frac{dx}{1+(x/a)^2} = a \cdot \arctan \frac{x}{a}$  und  $|U_{n,R}(f)|^2 = 4kTR$ :

$$\begin{aligned} \overline{U_2^2} &= \int_{f=0}^{\infty} |U_{n,C}(f)|^2 df = \int_{f=0}^{\infty} |H_{RC}(f)|^2 \cdot |U_{n,R}(f)|^2 df = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+(f/f_g)^2} \cdot 4kTR \cdot df \\ &= 4kTR \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{1+(f/f_g)^2} df = 4kTR \cdot f_g \arctan \frac{f}{f_g} \Big|_{f=0}^{f=\infty} = 4kTR \cdot f_g \left( \arctan \frac{\infty}{f_g} - \arctan \frac{0}{f_g} \right) \\ &= 4kTR \cdot f_g \left( \arctan \frac{\infty}{f_g} - \arctan \frac{0}{f_g} \right) = 4kTR \cdot f_g \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = 4kTR \cdot f_g \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{= kTR \cdot 2\pi f_g \cong kTR \cdot 6,28 f_g}$$

**Rechnung mit der Asymptotennäherung**  $|H_{RC}(f)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{für } f \leq f_g \\ \frac{1}{(f/f_g)^2} = \frac{f_g^2}{f^2} & \text{für } f \geq f_g \end{cases}$

$$\begin{aligned} \overline{U_2^2} &= \int_{f=0}^{\infty} |U_{n,C}(jf)|^2 df = \int_0^{\infty} |H_{RC}(jf)|^2 \cdot |U_{n,R}(f)|^2 df = 4kTR \cdot \left( \int_0^{f_g} 1 \cdot df + \int_{f_g}^{\infty} \frac{f_g^2}{f^2} df \right) \\ &= 4kTR \cdot \left[ (f_g - 0) - f_g^2 \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{f_g} \right) \right] = 4kTR \cdot \left[ f_g - f_g^2 \left( 0 - \frac{1}{f_g} \right) \right] = 4kTR \cdot [f_g + f_g] \end{aligned}$$

$$\boxed{= kTR \cdot 8 f_g}$$

**Vergleich:** Die Asymptotennäherung, welche die Absenkung der Kurve in  $f_g$  um  $-3\text{dB}$  nicht berücksichtigt, liefert ein um den Faktor  $4/\pi \approx 1,27$  zu großes Ergebnis.

**Beispiel:** Exakt gelöstes Integral mit  $R=1\text{K}\Omega$ ,  $f_g=1\text{KHz}$ . Die messbare, effektive Rauschspannung  $U_{n,C,\text{eff}}$  über der Kapazität C ergibt sich zu (man achte auf die Dimensionen):

$$U_{n,C,\text{eff}} = \sqrt{\overline{U_2^2}} = \sqrt{kTR \cdot 2\pi f_g} = \sqrt{1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{VA}s}{\text{K}} \cdot 300\text{K} \cdot 1000 \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot 2\pi \cdot 1000 \frac{1}{\text{s}}} = 161\text{nV}$$

## 7.6 Literatur zum Thema Rauschen

- [Hau99] Hausherr, B., "Flicker-Rauschen: Eigenschaften und Simulation", Elektronik, Heft 7, p. 64-69, 7. April 1999.
- [Ver98] Verhoeven, H.: Präzision eingebaut (OpAmp ohne 1/f-Rauschen). Elektronik 1998, Heft 22, p. 48ff.
- [Tie91] Tietze, U.; Schenk, Ch.: Halbleiter-Schaltungstechnik, 9. Auflage, Kapitel 4.10, Springer Verlag, 1991.
- [Woo95] Woodward, P.: My Own Right Time; An Exploration of Clockwork Design. Oxford University Press, 1995.
- [All87] Allan, D. W.: Time and Frequency Characterization, Estimation and Prediction of Precision in Clocks and Oscillators. IEEE Transactions on Ultrasonics and Frequency Control 34, (6), p. 647-658, Nov. 1987.
- [Man83] Mandelbrot, B. B.: The fractal geometry of nature, Chapter 27. W. H. Freeman Publications, New York 1983.
- [Bak88] Bak, P.; Tang, C.; Wiesenfeld, K.: Self-Organized Criticality. Physical review A, 38, (1), p. 364-374, July 1988.
- [Böd07] Bödiger, Wolfgang, "Rauschen ausgeblendet – Genaue OPVs durch Autozero-Technik“, Design & Elektronik, Heft 09, September 2007, pp. 18-20.