

Zeitkontinuierliche LZI-Systeme in s

Wie erklären sich die komplexen Impedanzen $j\omega L$ und $1/(j\omega C)$?

Warum modelliert man eine Kapazität als Admittanz (komplexer Leitwert) $j\omega C$ und eine Induktivität als Impedanz $j\omega L$?

Generelles Gesetz für die Kapazität: $I_C = C \cdot dU_C/dt = C \cdot U_C'(t)$ und Induktivität: $U_L = L \cdot dI_L/dt = L \cdot I_L'(t)$

Bei der "AC"-Rechnung setzen wir: $U_C(t) = \hat{U}_C \cdot \exp(j\omega t + \varphi_u)$ und $I_C(t) = \hat{I}_C \cdot \exp(j\omega t + \varphi_i)$

Daher: $C \cdot dU_C/dt = C j\omega U_C(t) = j\omega C U_C(t)$; und $L \cdot dI_L/dt = L j\omega I_L(t) = j\omega L I_L(t)$

Impedanzen: $X_C = U_C/I_C = 1/(j\omega C)$; und $X_L = U_L/I_L = j\omega L$

Messung: nur Realteil: $u(t) = \text{Re}\{U(t)\} = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$ und $i(t) = \text{Re}\{I(t)\} = \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$

Randbedingungen für die Messung eines komplexen Leitwertes oder einer komplexen Übertragungsfunktion?

Messung muss bei rein sinusförmiger Anregung und Ausgangsgröße erfolgen (eingeschwungener Zustand)

LZI-Systeme in s, Definitionen + Eigenschaften

(zeitdiskrete Systeme werden in $z=e^{sT}=e^{j\omega T}$ modelliert)

Wann ist ein System linear? "Einfache" (nicht formal exakte) Definition:

Bei Anregung mit reine Sinusschwingung, muss eine reine Sinusschwingung gleicher Frequenz heraus kommen.

Auch Offset verboten (ist Frequenz 0). Differenzieren und Integrieren erlaubt, Potenzen $\neq 1$ nicht erlaubt: x^2 , $y^{3/2}$, ...

LZI steht für linear und zeitinvariant (engl. LTI): Impulsantwort ändert sich nicht mit der Zeit

Wir setzen bei LZI-Systemen $s=j\omega$, also $X_L=sL$ statt $j\omega L$. Warum ist diese kleine Änderung ein großer Vorteil?:

Mit den Übertragungsfunktionen in s können wir die wichtigen Pole und Nullstellen berechnen

Wie entstehen die Differentialgleichungen (DGLn) aus den LZI-Systemen?

Durch mehrfaches Auftreten der Grundgleichungen $I_C = C \cdot U'_C$ und $U_L = L \cdot di'_L$ in Maschengleichungen

Zeitbereichs-Differentialgleichungen eines LZI-Systems $\Leftrightarrow$ Laplace Transformierte:

Homogene Form: $b_0 y + b_1 y' + b_2 y'' \equiv 0$ direkt lösbar mit $y(t) = K_1 \cdot \exp(s_{p1} \cdot t) + K_2 \cdot \exp(s_{p2} \cdot t)$; Ordnung $R \rightarrow s_{p1} \dots s_{pR}$

Ansatz: $y = K \cdot \exp(s \cdot t)$ liefert $b_0 + b_1 s + b_2 s^2 = 0 \Rightarrow$ Nullstellen s_{p1}, s_{p2} .

Lösung der DGL: $y(t) = K_1 \cdot \exp(s_{p1} \cdot t) + K_2 \cdot \exp(s_{p2} \cdot t)$, Konstanten K_1, K_2 aus Randbedingungen

Laplace: $y(t) \Leftrightarrow Y(s)$; $y'(t) \Leftrightarrow s \cdot Y(s)$; $y''(t) \Leftrightarrow s^2 \cdot Y(s) \Rightarrow (b_0 + b_1 s + b_2 s^2) \cdot Y(s) \equiv 0 \Rightarrow b_0 + b_1 s + b_2 s^2 = 0$

(a) Reelle Nullstellen s_{p1}, s_{p2} : Stabilität wenn $s_{p\#} < 0$ (linke Laplace-Halbebene!)

(b) Konjugiert-komplexes Nullstellenpaar $s_{p1,2} = \sigma_p \pm j\omega_p$:

Lösung schwingt: $K \cdot \exp(s_{p1} \cdot t) + K \cdot \exp(s_{p2} \cdot t) = K \cdot \exp(\sigma_p \cdot t) \cdot 2 \cos(\omega_p \cdot t + \varphi_0)$, Konstanten K, φ_0 aus Randbedingungen

Stabilität: $\sigma_p < 0$: stabil, Hüllkurve klingt ab, $\sigma_p = 0$: konstante Amplitude, $\sigma_p > 0$: aufklingend (= instabil)
= linke Laplace-Halbebene!

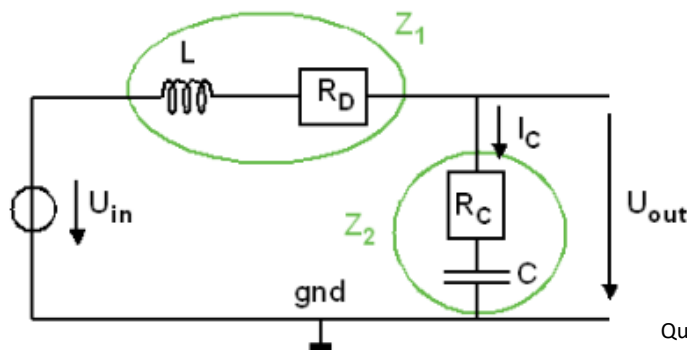
Bewegung der Pole in der Laplace-Ebene und Sprungantwort im Zeitbereich

$$H_{LP}(s) = \frac{A_0}{s^2 + 2Ds + 1} = \frac{A_0 \omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

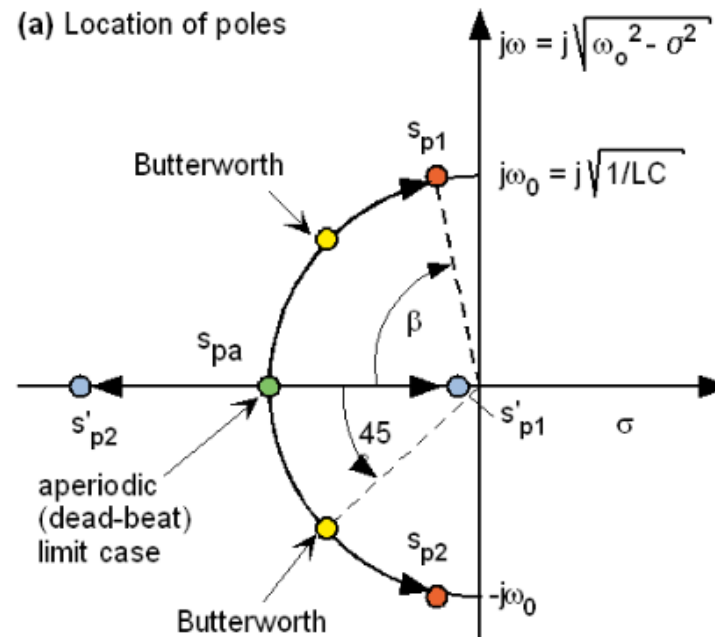
$$s_{p1,2} = -D \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{D^2}} \right) = -D \left(1 \mp j \sqrt{\frac{1}{D^2} - 1} \right)$$

$$= -D\omega_0 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{D^2}} \right) = -D\omega_0 \left(1 \mp j \sqrt{\frac{1}{D^2} - 1} \right)$$

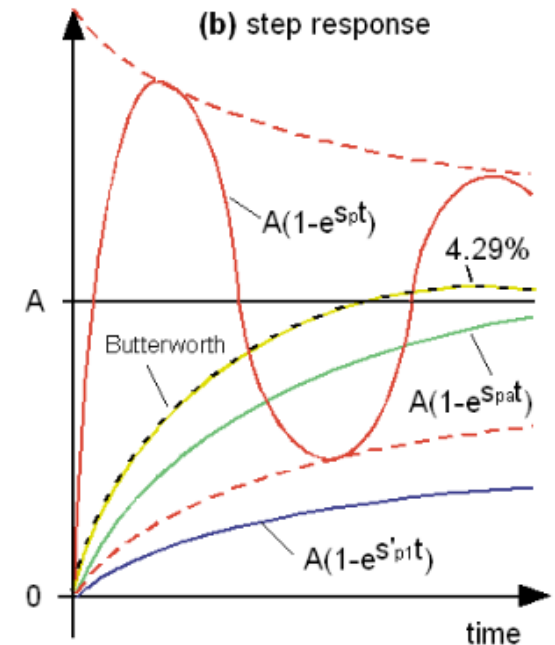
(c) Beispiel mit 1 zusätzlichen Nullstelle:



(a) Location of poles



(b) step response



Quelle: <https://hps.hs-regensburg.de/~scm39115/homepage/education/lessons/LinearFeedbackLoops/LinearFeedbackLoops.pdf>

Überlegungen: $f = 0$: $X_L = j\omega L = 0$, $X_C = 1/(j\omega C) \rightarrow \infty \Rightarrow$ DC-Verstärkung ist $|H(0)| = 1$
 $f \rightarrow \infty$: $X_L = j\omega L \rightarrow \infty$, $X_C = 1/(j\omega C) \rightarrow 0 \Rightarrow |H|$ für hohe Frequenzen $\rightarrow 0$
 Nullstelle: Z_2 wird nicht mehr viel kleiner wenn $|X_C| = R_C \Rightarrow \omega_n = 1/(R_C \cdot C)$

Quelle: https://hps.hs-regensburg.de/~scm39115/homepage/education/exams/sc/SC_2019s_A1_sol.pdf

Inhomogene Form: $b_0 y + b_1 y' + b_2 y'' \equiv a_0 x + a_1 x' + a_2 x''$ nicht direkt lösbar ! Lösungsansatz für LZI-Systeme:

Sinusförmige Anregung -> sinusförmige Reaktion gleicher Frequenz: $X = \hat{U}_x \exp(j\omega t) \rightarrow Y = \hat{U}_y \exp(j\omega t + \varphi)$

Für diesen inhomogenen Fall kann man die Situation lösen mit: $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$

Laplace: $x(t) \Leftrightarrow X(s)$; $x'(t) \Leftrightarrow s \cdot X(s)$; $x''(t) \Leftrightarrow s^2 \cdot X(s)$ und $y(t) \Leftrightarrow Y(s)$; $y'(t) \Leftrightarrow s \cdot Y(s)$; $y''(t) \Leftrightarrow s^2 \cdot Y(s)$

Daraus folgt $(b_0 + b_1 s + b_2 s^2) \cdot Y(s) \equiv (a_0 + a_1 s + a_2 s^2) \cdot X(s)$ und daraus die Übertragungsfunktion $H(s) = Y(s) / X(s) = (a_0 + a_1 s + a_2 s^2) / (b_0 + b_1 s + b_2 s^2)$

| " $\equiv$ " : über der gesamten Abszisse identisch

Messung von $H(s)$ mit $s = j\omega = j2\pi f$ im eingeschwungenen Zustand!

Bode-Diagramm: Amplitudendiagramm: $|\hat{U}_y(j\omega) / \hat{U}_x(j\omega)| = |H(j\omega)|$,

Phasendiagramm: $\varphi = \arctan(\text{Im}\{H(j\omega)\} / \text{Re}\{H(j\omega)\})$

Messung der Phase als Zeitverzögerung: $2\pi = 360^\circ$ entsprechen 1 Schwingungsperiode $T=1/f$

Verzögerung $-t_{\text{del}}$ entspricht Phase $-\varphi$. Daher: $t_{\text{del}} \cdot f = t_{\text{del}} / T = \varphi / 2\pi = \varphi^\circ / 360^\circ \Leftrightarrow t_{\text{del}} = \varphi / \omega$

Transiente Gesamtlösung für ein Problem

Lösung der Differentialgleichung als Summe von inhomogenem und homogenem Part $y = y_i + y_h$

$$\begin{aligned} b_0 y_i + b_1 y_i' + b_2 y_i'' &\equiv a_0 x + a_1 x' + a_2 x'' \\ + \quad b_0 y_h + b_1 y_h' + b_2 y_h'' &\equiv 0 \\ \hline = \quad b_0 y + b_1 y' + b_2 y'' &\equiv a_0 x + a_1 x' + a_2 x'' \end{aligned}$$

Beispiel (a) Sprungantwort: Nach dem Sprung ist $y_i = x = \text{constant}$

(b) harmonische Anregung: $y_i(t) = |H(j\omega)| \cdot x(t-t_{\text{del}})$ mit $t_{\text{del}} = \varphi/\omega$, (enthält (a) für $\omega = 0$)

Inhomogene Lösung wird so gewählt, dass Randbedingungen erfüllt,

typischerweise ist das $y, y', \dots y^{(R-1)}$ stetig, da $y(t)$ in der Realität ∞ oft stetig differenzierbar ist.

Der homogene Teil ist der eigentlich „transiente“ Part im Sinne des lateinischen trans-ire = hinüber-gehen